



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

1993

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

On pose $p = 1/6$ et $q = 1 - p = 5/6$. Le paramètre entier $r \geq 2$ reste fixé.

1. Pour $r = 2$, la relation s'écrit $u_n = p^2 - pu_{n-1}$ pour $n \geq 2$. Son point fixe est le réel c vérifiant $c = p^2 - pc$, soit

$$c = \frac{p^2}{1+p} = \frac{1}{42}.$$

La suite $w_n = u_n - c$ vérifie $w_n = -pw_{n-1}$. Elle est géométrique de raison $-p = -1/6$, d'où, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{42} + \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \left(u_1 - \frac{1}{42}\right).$$

Comme $|-1/6| < 1$, la puissance tend vers 0. Ainsi, quel que soit le réel initial u_1 ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{42}.$$

2. a) Une suite constante de valeur c vérifie (1) exactement lorsque

$$c(1 + p + \dots + p^{r-1}) = p^r.$$

Le coefficient de c est strictement positif. La somme géométrique vaut $(1 - p^r)/(1 - p)$; il existe donc une unique suite constante convenable, de valeur

$$c = \frac{qp^r}{1 - p^r} = \frac{5}{6(6^r - 1)}.$$

Le dénominateur est strictement positif puisque $0 < p < 1$.

- b) On remplace chaque u_{n-j} par $v_{n-j} + c$ dans (1). Il vient

$$\sum_{j=0}^{r-1} p^j v_{n-j} + c \sum_{j=0}^{r-1} p^j = p^r.$$

D'après a), le second terme du membre de gauche vaut p^r . L'égalité est donc équivalente

à

$$\sum_{j=0}^{r-1} p^j v_{n-j} = 0,$$

qui est (2). Chaque transformation est réversible : l'équivalence demandée est démontrée.

c) Posons $w_n = 3^n v_n$. En multipliant (2) par 3^n , on obtient, pour $n \geq r$,

$$w_n = - \sum_{j=1}^{r-1} (3p)^j w_{n-j} = - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{w_{n-j}}{2^j}.$$

On raisonne par récurrence forte. Pour $1 \leq n \leq r-1$, l'inégalité $|w_n| \leq M$ est la définition même du maximum M .

Soit $n \geq r$ et supposons l'inégalité vraie aux rangs précédents. Tous les indices $n-j$, pour $1 \leq j \leq r-1$, sont compris entre 1 et $n-1$. L'inégalité triangulaire donne

$$|w_n| \leq \sum_{j=1}^{r-1} \frac{|w_{n-j}|}{2^j} \leq M \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{2^j} = M \left(1 - \frac{1}{2^{r-1}}\right) \leq M.$$

La récurrence prouve $|3^n v_n| \leq M$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent,

$$|v_n| \leq \frac{M}{3^n} \rightarrow 0.$$

La suite (v_n) converge donc vers 0, y compris lorsque $M = 0$.

d) D'après b), toute suite u vérifiant (1) s'écrit $u_n = c + v_n$, avec v vérifiant (2). La question c) donne $v_n \rightarrow 0$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{qp^r}{1-p^r} = \frac{5}{6(6^r-1)}.$$

Le résultat dépend de r , mais pas des valeurs initiales $u_1, \dots, u_{r-1}$. Pour $r = 2$, on retrouve bien $1/42$.

Partie II

Les jets sont indépendants et chaque événement S_n a pour probabilité $p = 1/6$. L'indépendance des jets, explicitée dans le sujet adapté, sera utilisée pour les blocs disjoints et pour séparer le passé des jets futurs.

1. a) Question adaptée au programme actuel : l'indépendance des jets est rendue explicite dans le préambule, afin de justifier les indépendances utilisées.

L'événement E_k exige r as sur un bloc de r jets : $P(E_k) = p^r$. Les événements $E_1, \dots, E_n$ dépendent de blocs disjoints de jets indépendants ; le lemme des coalitions assure leur indépendance mutuelle. Il en est de même de leurs complémentaires. Ainsi,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{E_k}\right) = (1 - p^r)^n = \left(1 - \frac{1}{6^r}\right)^n.$$

Les événements $A_n = \bigcap_{k=1}^n \overline{E_k}$ forment une suite décroissante et leur intersection est $\bigcap_{k \geq 1} \overline{E_k}$. La continuité décroissante des probabilités donne

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E_k}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - p^r)^n = 0,$$

car $0 < 1 - p^r < 1$.

- b) Par passage au complémentaire, $P(\bigcup_{k \geq 1} E_k) = 1$. Dès qu'un E_k est réalisé, une suite de r as consécutifs a été obtenue. L'événement « obtenir au moins une telle suite » contient donc un événement de probabilité 1 ; sa probabilité vaut elle aussi 1.

Les blocs choisis ne recensent pas toutes les suites possibles, mais ils suffisent pour démontrer l'obtention presque sûre d'une première suite.

2. a) On note $A_n = S_{n-r+1} \cap \dots \cap S_n$, pour $n \geq r$. Sur une réalisation appartenant à A_n , on est dans une suite ininterrompue de succès jusqu'au jet n . Les groupes comptabilisés y sont découpés successivement par paquets de r succès. Deux fins de

groupes successives sont séparées de r jets, et le nombre de succès non encore comptabilisés après la dernière fin de groupe appartient à $\{0, \dots, r-1\}$. Il y a donc une et une seule fin de groupe comptabilisée dans $\{n-r+1, \dots, n\}$.

Pour traduire précisément cette propriété en probabilités, on pose, pour $0 \leq j \leq r-1$,

$$F_j = U_{n-j} \cap \bigcap_{\ell=n-j+1}^n S_\ell,$$

avec l'intersection vide égale à l'événement certain lorsque $j = 0$. Si $n-j < r$, U_{n-j} est impossible, conformément aux conventions sur u_{n-j} .

Les événements F_j sont deux à deux incompatibles : deux groupes comptabilisés ne peuvent pas s'achever à moins de r jets d'écart. Leur réunion est exactement A_n . En effet, chaque F_j garantit les r derniers succès, tandis que, sur A_n , la fin de groupe unique décrite ci-dessus fournit le bon indice j .

L'événement U_{n-j} dépend seulement des $n-j$ premiers jets, et les j jets suivants sont indépendants de ce passé. Par le lemme des coalitions,

$$P(F_j) = u_{n-j} p^j.$$

Comme $P(A_n) = p^r$, l'additivité sur cette réunion disjointe donne

$$p^r = \sum_{j=0}^{r-1} p^j u_{n-j}.$$

C'est (1). Le résultat de la partie I s'applique donc et fournit

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{qp^r}{1-p^r} = \frac{5}{6(6^r-1)}.$$

b) Pour $r = 2$, la limite demandée est

$$L = \frac{5}{6(6^2-1)} = \frac{1}{42}.$$

Cette valeur concerne les groupes comptabilisés sans réutiliser un succès déjà pris dans un groupe. La probabilité de l'événement différent $S_{n-1} \cap S_n$, qui ne tient pas compte de cette comptabilisation, vaut $1/36$ à chaque rang $n \geq 2$; la distinction explique pourquoi ce nombre ne répond pas à la question.

3. a) La question 1 assure que le premier groupe apparaît presque sûrement en un nombre fini de jets. Pour $N \geq 1$, les événements $[X = n]$, avec $1 \leq n \leq N$, sont disjoints et leur réunion est $[X \leq N]$. Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^N P(X = n) = P(X \leq N).$$

Les événements $[X \leq N]$ croissent vers l'événement «le premier groupe apparaît en temps fini», de probabilité 1. Par continuité croissante,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P(X \leq N) = 1.$$

On peut attribuer arbitrairement une valeur finie à X sur l'événement exceptionnel où aucun groupe n'apparaît; cela ne modifie aucune probabilité ni les calculs suivants.

- b) Question adaptée au programme actuel : la notation $U_n(x)$ imprimée dans la définition est rectifiée en $U(x)$, conformément à la série et aux questions suivantes.

Puisque $0 \leq u_n \leq 1$, pour $0 \leq x < 1$ on a $0 \leq u_n x^n \leq x^n$. La série géométrique majorante converge; la série définissant $U(x)$ converge donc. De plus, $u_0 = 1$ donne $U(x) \geq 1$.

Pour un indice $j \in \{0, \dots, r-1\}$, on change l'indice $m = n - j$. Comme

$$u_1 = \dots = u_{r-1} = 0,$$

$$\sum_{n=r}^{+\infty} u_{n-j} x^n = x^j \sum_{m=r-j}^{+\infty} u_m x^m = x^j (U(x) - 1).$$

Ces changements d'indices portent sur des séries convergentes; pour $x = 0$, les égalités restent valables directement. En multipliant (1) par x^n puis en sommant sur $n \geq r$, on

obtient

$$(U(x) - 1) \sum_{j=0}^{r-1} (px)^j = p^r \sum_{n=r}^{+\infty} x^n = \frac{(px)^r}{1-x}.$$

La somme finie vaut $(1 - (px)^r)/(1 - px)$, dont le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs pour $0 \leq x < 1$. On peut donc diviser :

$$U(x) = 1 + \frac{(px)^r}{1 - (px)^r} \frac{1 - px}{1 - x} = 1 + \frac{(x/6)^r}{1 - (x/6)^r} \frac{1 - x/6}{1 - x}.$$

- c) Si U_n est réalisé, un premier groupe a nécessairement été comptabilisé à un rang $k \leq n$. On partitionne donc U_n suivant les événements $[X = k]$, pour $0 \leq k \leq n$.

Lorsque le premier groupe s'achève au rang k , tous les succès de ce groupe ont été utilisés et le comptage recommence au jet suivant. L'événement $[X = k]$ dépend des k premiers jets ; les jets $k + 1, \dots, n$ en sont indépendants et ont la même loi que les $n - k$ premiers jets. La probabilité qu'un groupe soit comptabilisé au rang n dans cette reprise est donc u_{n-k} .

Pour $k = n$, cette affirmation signifie qu'un groupe vient précisément de s'achever ; la convention $u_0 = 1$ est cohérente. Pour un k tel que $P(X = k) = 0$, l'intersection a une probabilité nulle ; aucun conditionnement par un événement nul n'est nécessaire. Dans tous les cas,

$$P(U_n \cap [X = k]) = P(X = k)u_{n-k}.$$

L'additivité sur la partition finie donne, pour $n \geq r$,

$$u_n = \sum_{k=0}^n P(X = k)u_{n-k}.$$

Pour $1 \leq n < r$, les deux membres sont nuls puisque $u_n = 0$ et $P(X = k) = 0$ pour tous les indices de la somme. La relation (3) est ainsi démontrée pour tout $n \geq 1$.

d) Posons

$$A_n = \sum_{i=0}^n a_i,$$

$$B_n = \sum_{j=0}^n b_j$$

et

$$C_n = \sum_{k=0}^n c_k.$$

Le développement de produits de sommes finies donne

$$C_n = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \leq n}} a_i b_j, \quad A_n B_n = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} a_i b_j.$$

Le premier domaine d'indices est inclus dans le deuxième, lui-même inclus dans $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j \leq 2n\}$. Tous les termes étant positifs ou nuls,

$$C_n \leq A_n B_n \leq C_{2n}.$$

Notons

$$A = \sum_{i \geq 0} a_i$$

et

$$B = \sum_{j \geq 0} b_j,$$

finis par hypothèse. Comme $A_n \leq A$ et $B_n \leq B$, on a $0 \leq C_n \leq AB$. La suite (C_n) est croissante, car $c_n \geq 0$, et majorée; elle converge vers un réel C . La série

$$\sum c_n$$

converge donc.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans les deux inégalités, on obtient $C \leq AB \leq C$. La sous-suite (C_{2n}) a bien la même limite C . Finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

La preuve utilise uniquement des sommes finies, la positivité et la convergence monotone d'une suite numérique.

- e) Pour $0 \leq x \leq 1$, les termes $P(X = n)x^n$ sont positifs ou nuls et majorés par $P(X = n)$. La série de ces majorants a pour somme 1 par a). Ainsi $G(x)$ est bien définie sur tout $[0, 1]$, avec $G(1) = 1$ et $G(0) = 0$.

Pour $0 \leq x < 1$, les deux séries de termes $a_k = P(X = k)x^k$ et $b_j = u_j x^j$ convergent et sont à termes positifs ou nuls. La question d) s'applique. Leur produit a pour coefficient d'indice n

$$\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = x^n \sum_{k=0}^n P(X = k) u_{n-k}.$$

Pour $n \geq 1$, cette quantité est $x^n u_n$ d'après (3). Pour $n = 0$, elle vaut $P(X = 0)u_0 = 0$. On obtient donc

$$G(x)U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = U(x) - 1,$$

soit, puisque $U(x) \geq 1$,

$$G(x) = 1 - \frac{1}{U(x)}.$$

f) Méthode 1 — Utiliser l'expression rationnelle.

En posant $a(x) = (px)^r$, la formule de b) devient

$$U(x) = \frac{(1-x)(1-a(x)) + a(x)(1-px)}{(1-x)(1-a(x))} = \frac{1-x+qx a(x)}{(1-x)(1-a(x))}.$$

Par e), on en déduit, pour $0 \leq x < 1$,

$$G(x) = \frac{a(x)(1-px)}{1-x+qx a(x)} = \frac{(x/6)^r(1-x/6)}{1-x+\frac{5}{6}x(x/6)^r}.$$

Le dénominateur $D(x) = 1-x+qp^r x^{r+1}$ est strictement positif sur $[0, 1[$, car $1-x > 0$, et $D(1) = qp^r > 0$. Le quotient est donc continu sur tout $[0, 1]$ lorsqu'on lui donne sa valeur en 1, qui est

$$\frac{p^r(1-p)}{qp^r} = 1.$$

Cette valeur coïncide avec $G(1) = 1$. La fonction G est ainsi continue, y compris au point 1.

Méthode 2 — Contrôler directement le reste de la série au point 1.

Pour tout $N \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, la convergence des deux séries et la positivité donnent

$$0 \leq 1 - G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)(1-x^n) \leq \sum_{n=1}^N P(X=n)(1-x^n) + \sum_{n>N} P(X=n).$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit d'abord N tel que le dernier reste soit inférieur à $\varepsilon/2$, ce qui est

possible puisque la somme des probabilités vaut 1. Pour ce N fixé, la somme finie précédente tend vers 0 lorsque $x \rightarrow 1^-$; elle est donc inférieure à $\varepsilon/2$ pour x assez proche de 1. On a alors $0 \leq 1 - G(x) < \varepsilon$.

Cela démontre directement $G(x) \rightarrow G(1)$ au point 1. Aux points de $[0, 1[$, la continuité a déjà été établie à l'aide de la formule rationnelle.

La première méthode exploite la formule particulière obtenue ; la seconde sépare une somme finie et un reste indépendant de x , procédé réutilisable quand aucune formule explicite n'est disponible.

4. a) Question adaptée au programme actuel : l'admission générale de dérivation terme à terme sur $[0, 1]$ est remplacée par une indication permettant d'établir directement l'existence et la valeur du moment demandé.

Méthode 1 — Encadrer les sommes partielles du premier moment.

On note $a_n = P(X = n)$. Pour $0 \leq x < 1$, les séries

$$\sum a_n$$

et

$$\sum a_n x^n$$

convergent ; par linéarité, puis en utilisant la somme géométrique finie,

$$H(x) = \frac{1 - G(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{1 - x^n}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (1 + x + \dots + x^{n-1}).$$

La formule rationnelle de 3.f donne, sans dériver de série,

$$1 - G(x) = \frac{(1-x)(1-(px)^r)}{1-x+qp^rx^{r+1}},$$

d'où

$$H(x) = \frac{1-(px)^r}{1-x+qp^rx^{r+1}} \rightarrow A = \frac{1-p^r}{qp^r}$$

lorsque $x \rightarrow 1^-$. Cette limite est finie et strictement positive.

Pour tout $N \geq 1$, les termes étant positifs ou nuls,

$$\sum_{n=1}^N a_n(1+x+\dots+x^{n-1}) \leq H(x).$$

On fait tendre x vers 1 dans cette somme finie :

$$\sum_{n=1}^N na_n \leq A.$$

Les sommes partielles de

$$\sum na_n$$

sont donc croissantes et majorées par A . Cette série converge vers un réel $B \leq A$, ce qui prouve que X admet une espérance finie B .

Inversement, $1+x+\dots+x^{n-1} \leq n$ pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0, 1[$. La comparaison terme à terme donne

$$H(x) \leq \sum_{n \geq 1} na_n = B.$$

En passant à la limite, $A \leq B$. Ainsi $A = B$ et

$$E(X) = \frac{1 - p^r}{qp^r} = \frac{6(6^r - 1)}{5}.$$

La fréquence limite des fins de groupes trouvée en 2.a vérifie donc ici $E(X) = 1/L$; cette relation résulte des deux calculs particuliers établis.

Méthode 2 — Étudier le nombre de succès consécutifs en attente.

On peut déterminer ce temps moyen par des équations portant sur les r possibilités avant l'achèvement du premier groupe. Justifions d'abord que les temps utilisés ont des espérances finies.

Soit Y le numéro du premier bloc disjoint de r jets composé uniquement d'as. Les blocs étant indépendants, Y suit une loi géométrique de paramètre p^r sur $\mathbb{N}^*$ et $E(Y) = 1/p^r$. Le premier groupe de r as apparaît au plus tard à la fin de ce bloc, donc $0 \leq X \leq rY$ presque sûrement.

Pour tout $N \geq 1$, la variable $\min(X, N)$ est bornée et vérifie $\min(X, N) \leq rY$; les deux membres ont des espérances finies. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^N nP(X = n) \leq E(\min(X, N)) \leq rE(Y) = \frac{r}{p^r}.$$

Les sommes partielles du premier moment de X sont croissantes et majorées.

L'espérance de X existe donc et vérifie $E(X) \leq r/p^r < +\infty$.

Pour $0 \leq j \leq r$, on considère une reprise des jets où j succès consécutifs sont déjà acquis, et on note T_j le nombre de jets supplémentaires nécessaires pour obtenir r succès consécutifs. On pose $T_r = 0$ et $m_j = E(T_j)$. En utilisant les mêmes jets futurs, on obtient le groupe au moins aussi vite à partir de j succès qu'à partir de zéro; donc $0 \leq T_j \leq T_0$. Les espérances m_j sont finies, et $m_0 = E(X)$.

Au premier jet supplémentaire, un succès, de probabilité p , fait passer de j à $j + 1$ succès consécutifs; un échec, de probabilité q , ramène à zéro. Les jets suivants sont

indépendants de ce premier jet. En partageant la loi du temps suivant ces deux événements puis en calculant son espérance, on obtient, pour $0 \leq j \leq r-1$,

$$m_j = 1 + pm_{j+1} + qm_0, \quad m_r = 0.$$

Il s'agit uniquement d'une partition selon le premier résultat, appliquée à des variables d'espérance finie. En remontant à partir de $m_r = 0$, on démontre par récurrence

$$m_j = (1 + p + \dots + p^{r-j-1})(1 + qm_0).$$

Pour $j = 0$, on a donc

$$m_0 = \frac{1 - p^r}{q}(1 + qm_0),$$

soit $p^r m_0 = (1 - p^r)/q$. Comme $p > 0$,

$$m_0 = E(X) = \frac{1 - p^r}{qp^r} = \frac{6(6^r - 1)}{5}.$$

La première méthode suit la fonction G et justifie le passage au premier moment par des encadrements. La seconde utilise l'état du comptage des succès et permet de calculer le temps moyen directement, sans fonction génératrice.

b) Question adaptée au programme actuel : la durée d'une année est précisée à 365 jours pour les conversions numériques.

Un jet étant effectué chaque seconde, le temps moyen en secondes est

$$\tau_r = \frac{6(6^r - 1)}{5}.$$

Les durées en minutes, heures, jours et années valent respectivement $\tau_r/60$, $\tau_r/3600$, $\tau_r/86400$ et $\tau_r/31536000$, avec la convention de 365 jours par année.

Les temps moyens en secondes sont exactement $\tau_5 = 9330$, $\tau_{10} = 72559410$ et $\tau_{25} = 34116345635915641650$. Le tableau suivant donne les conversions arrondies à trois chiffres significatifs.

r	Secondes	Minutes	Heures	Jours	Années
5	$9,33 \times 10^3$	$1,56 \times 10^2$	2,59	$1,08 \times 10^{-1}$	$2,96 \times 10^{-4}$

r	Secondes	Minutes	Heures	Jours	Années
10	$7,26 \times 10^7$	$1,21 \times 10^6$	$2,02 \times 10^4$	$8,40 \times 10^2$	2,30
25	$3,41 \times 10^{19}$	$5,69 \times 10^{17}$	$9,48 \times 10^{15}$	$3,95 \times 10^{14}$	$1,08 \times 10^{12}$

Pour cinq as, il s'agit d'environ 2 heures, 35 minutes et 30 secondes ; pour dix as, d'environ 2,30 années. Pour vingt-cinq as, le temps moyen est d'environ 1080 milliards d'années, soit environ 72 fois la valeur de comparaison de 15 milliards d'années fournie par le sujet.

Ces quantités sont des espérances : elles ne garantissent pas l'obtention du groupe dans une durée déterminée et ne constituent pas des délais maximaux.

Relevé des adaptations

- Préambule et II.1.a, II.2.a, II.3.c : indépendance des jets explicitée, hypothèse nécessaire aux calculs de blocs et à la reprise indépendante après un premier groupe. La règle de comptabilisation sans réutilisation des succès est conservée ; sa portée est rappelée en II.2.b.
- II.3.b : rectification de la notation $U_n(x)$ en $U(x)$, employée par la formule et les questions suivantes.
- II.4.a : remplacement de l'admission de dérivation terme à terme sur $[0, 1]$ par une indication sur le quotient $(1 - G(x))/(1 - x)$ et les sommes partielles. L'existence et la valeur de l'espérance sont ainsi démontrées pour la seule loi étudiée, sans règle générale sur les séries de fonctions.
- II.4.b : convention de conversion d'une année en 365 jours explicitée pour rendre les valeurs numériques reproductibles. La valeur de comparaison de 15 milliards d'années est conservée comme donnée du sujet.