



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

1991

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, j désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Partie I

On établit dans cette partie quelques résultats préliminaires d'algèbre linéaire. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique, et l'on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Étude des éléments propres de M

- a) Quelles sont les trois valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de M , avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$?
- b) La matrice M est-elle diagonalisable?
- c) Déterminer des vecteurs propres v_1, v_2, v_3 associés respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On prendra leur dernière composante égale à 1.
- d) Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3) , puis déterminer l'inverse de cette matrice.

2. Calcul des puissances de M

- a) Dédire des résultats précédents une matrice diagonale D telle que $M = PDP^{-1}$.
- b) En déduire l'expression de M^{j-1} . On rappelle que l'entier j est non nul.

Partie II

On considère un marché sur lequel trois fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs. Les commandes de ces derniers arrivent successivement et de façon indépendante auprès des trois fournisseurs, chacun d'eux étant choisi de façon équiprobable. On désigne :

- par X_j le nombre de fournisseurs ayant reçu au moins une commande de l'un ou plusieurs des j premiers consommateurs ;
- par $P(X_j = k)$ la probabilité de l'événement $[X_j = k]$, pour $k = 1, 2, 3$;
- par U_j la matrice colonne

$$U_j = \begin{pmatrix} P(X_j = 1) \\ P(X_j = 2) \\ P(X_j = 3) \end{pmatrix} ;$$

- par $E(X_j)$ et $V(X_j)$ l'espérance et la variance de X_j .

Les probabilités de transition décrivent le choix du prochain consommateur à partir d'un nombre donné de fournisseurs déjà servis. Elles s'interprètent comme des probabilités conditionnelles lorsque l'état de départ a une probabilité strictement positive. Les états impossibles ne donnent lieu à aucun conditionnement.

1. Étude de la loi des variables aléatoires X_j

a) Pour $j \geq 3$, déterminer les trois probabilités conditionnelles

$$P(X_{j+1} = 1 \mid X_j = 1), \quad P(X_{j+1} = 1 \mid X_j = 2), \quad P(X_{j+1} = 1 \mid X_j = 3).$$

Puis, à l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire l'expression de $P(X_{j+1} = 1)$ en fonction de $P(X_j = 1)$, $P(X_j = 2)$ et $P(X_j = 3)$.

Exprimer de même $P(X_{j+1} = 2)$ et $P(X_{j+1} = 3)$ en fonction de ces trois probabilités. Justifier que les relations obtenues restent valables pour $j = 1, 2$, en utilisant les transitions du modèle et seulement les états de probabilité positive.

b) Établir que $U_{j+1} = MU_j$.

c) Préciser U_1 , puis calculer U_j en fonction de j .

d) Déterminer la limite des éléments de U_j lorsque j tend vers $+\infty$.

2. Calcul de l'espérance de X_j

a) On considère les matrices lignes $L = (1, 2, 3)$ et $J = (1, 1, 1)$. Déterminer deux réels α, β tels que $LM = \alpha L + \beta J$. Calculer JU_j , puis LU_j en fonction de $E(X_j)$. Établir alors que

$$E(X_{j+1}) = \alpha E(X_j) + \beta.$$

b) Préciser $E(X_1)$, puis calculer $E(X_j)$ en fonction de j . Vérifier que $E(X_j)$ tend vers 3 lorsque j tend vers $+\infty$.

c) À quel entier j_0 , respectivement j_1 , le nombre j des clients ayant passé commande doit-il être supérieur afin d'avoir

$$2,9 \leq E(X_j) \leq 3, \quad \text{respectivement } 2,99 \leq E(X_j) \leq 3$$

?

On désigne désormais par T le nombre de consommateurs ayant déjà procédé à une commande lorsque, pour la première fois, chacun des trois fournisseurs a reçu au moins une commande.

3. Étude de la loi de T

- a) Comparer les événements $[T \leq j]$ et $[X_j = 3]$. En déduire $P(T = j)$ en fonction de $P(X_j = 3)$ et $P(X_{j-1} = 3)$ pour $j \geq 2$.

On a $P(T = 1) = P(X_1 = 3) = 0$.

- b) À l'aide de l'expression de $P(X_j = 3)$ obtenue en II.1, établir que, pour $j \geq 2$,

$$P(T = j) = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}.$$

- c) Calculer $P(T \leq j) = P(T = 1) + P(T = 2) + \dots + P(T = j)$. En déduire que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} P(T = j) = 1.$$

4. Calcul de l'espérance de T

- a) Pour tout réel $x \in [0, 1[$ et tout entier $n \geq 1$, établir la formule

$$\sum_{j=2}^{n+1} x^j = x^2 \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

En dérivant cette égalité puis en faisant tendre n vers $+\infty$, calculer

$$S(x) = \sum_{j=2}^{+\infty} jx^{j-1}.$$

- b) En déduire la valeur de $E(T)$.

Partie III

Dans cette partie, on pose, pour tout entier $j \geq 1$,

$$F(j) = 1 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^j - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^j.$$

1. Étude d'un algorithme

a) Étudier le sens de variation de la suite $(F(j))$. Préciser $F(1)$ et la limite de $F(j)$ lorsque j tend vers $+\infty$.

b) Prouver que, pour tout réel $y \in]0, 1[$, il existe un unique entier $j \geq 2$ tel que

$$F(j-1) < y \leq F(j).$$

c) On considère la fonction Python suivante. Son argument y est un réel appartenant à $]0, 1[$. Les variables n, p, q sont entières et z est réelle. L'instruction `return` renvoie la valeur finale de `n`; `print(seuil(y))` permet de l'afficher.

Python

```
def seuil(y):  
    n = 1  
    p = 2  
    q = 3  
    z = (1 - y) / 3  
    while p - 1 > q * z:  
        n = n + 1  
        p = 2 * p  
        q = 3 * q  
    return n
```

Exprimer en fonction de k les valeurs contenues dans n, p, q à l'issue du k -ième passage dans la boucle `while`, dans la mesure où ce passage a lieu. Pour $k = 0$, il n'y a aucun passage dans la boucle et les valeurs sont 1, 2, 3.

On note j la valeur finale contenue dans n .

Exprimer en fonction de j l'avant-dernière et la dernière valeur prises par $(p-1)/q$ au cours de l'algorithme. Quelles inégalités vérifient-elles? En déduire que $F(j-1) < y \leq F(j)$.

- d)** Déterminer un équivalent de l'entier j tel que $F(j-1) < y \leq F(j)$ lorsque y tend vers 1.

2. Application à l'étude de la fonction de répartition de T

- a)** Comparer $P(T \leq j)$ et $F(j)$.
- b)** À quel entier j_0 , respectivement j_1 , le nombre j des clients ayant passé commande doit-il être supérieur afin d'avoir

$$P(T \leq j) \geq 0,5, \quad \text{respectivement } P(T \leq j) \geq 0,99?$$