



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

1991

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1. Étude des éléments propres de M

- a) Un réel λ est une valeur propre de M si et seulement si $M - \lambda I_3$ n'est pas inversible. Cette matrice est triangulaire inférieure, de diagonale $(1/3 - \lambda, 2/3 - \lambda, 1 - \lambda)$. Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. On en déduit, sans calcul de déterminant,

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{2}{3}, \quad \lambda_3 = 1.$$

- b) Les trois valeurs propres sont réelles et distinctes. Des vecteurs propres non nuls associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre. Il existe donc trois vecteurs propres formant une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui prouve que M est diagonalisable.

- c) On résout séparément les trois systèmes, en imposant la dernière composante égale à 1.

Pour $\lambda_1 = 1/3$, les deuxième et troisième lignes de $Mv = (1/3)v$ donnent $2x + y = 0$ et $y + 2z = 0$. Avec $z = 1$, on obtient $y = -2$, puis $x = 1$. Ainsi,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_2 = 2/3$, la première ligne impose $x = 0$ et la troisième impose $y + z = 0$. Avec $z = 1$, on obtient

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_3 = 1$, la première ligne impose $x = 0$, puis la deuxième impose $y = 0$. On obtient

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces trois vecteurs sont non nuls et satisfont les égalités propres ; leur dernière composante vaut bien 1.

d) La matrice de passage a pour colonnes les coordonnées de la nouvelle base dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode 1 — Vérifier un inverse par le produit.

Le produit de P par lui-même donne

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 + 2 & 1 & 0 \\ 1 - 2 + 1 & -1 + 1 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

La matrice P est donc inversible et $P^{-1} = P$.

Méthode 2 — Retrouver les coordonnées dans la nouvelle base.

Écrivons ${}^t(x, y, z) = av_1 + bv_2 + cv_3$. Les coordonnées satisfont

$$x = a, \quad y = -2a - b, \quad z = a + b + c.$$

On résout successivement :

$$a = x, \quad b = -2x - y, \quad c = x + y + z.$$

Ainsi, la matrice qui donne les nouvelles coordonnées à partir des coordonnées canoniques est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P.$$

La première méthode est rapide quand un inverse se reconnaît ; la seconde explique le rôle d'une matrice de passage et construit son inverse.

2. Calcul des puissances de M

a) Les colonnes de P vérifient $Mv_i = \lambda_i v_i$, dans l'ordre choisi. Par conséquent,

$$MP = PD, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme P est inversible, cette identité équivaut à $M = PDP^{-1}$.

b) Méthode 1 — Utiliser la diagonalisation.

Posons $m = j - 1 \geq 0$, $a_m = (1/3)^m$ et $b_m = (2/3)^m$. Dans le produit de m facteurs

$PD P^{-1}$, les facteurs intermédiaires $P^{-1}P$ se simplifient; le cas $m = 0$ donne également $M^0 = I_3$. Ainsi,

$$M^m = PD^m P^{-1}, \quad D^m = \begin{pmatrix} a_m & 0 & 0 \\ 0 & b_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule d'abord

$$PD^m = \begin{pmatrix} a_m & 0 & 0 \\ -2a_m & -b_m & 0 \\ a_m & b_m & 1 \end{pmatrix},$$

puis on multiplie à droite par $P^{-1} = P$. Il vient

$$M^{j-1} = \begin{pmatrix} a_m & 0 & 0 \\ 2(b_m - a_m) & b_m & 0 \\ 1 + a_m - 2b_m & 1 - b_m & 1 \end{pmatrix}, \quad m = j - 1.$$

Pour $j = 1$, $a_0 = b_0 = 1$ et cette expression redonne bien I_3 .

Méthode 2 — Vérifier directement la formule par récurrence.

Notons N_m la matrice affichée ci-dessus. Elle vérifie $N_0 = I_3$. Supposons $M^m = N_m$. Les relations $a_{m+1} = a_m/3$ et $b_{m+1} = 2b_m/3$ permettent de calculer le produit MN_m .

Son coefficient $(1, 1)$ vaut $a_m/3 = a_{m+1}$. Son coefficient $(2, 1)$ vaut

$$\frac{2}{3}a_m + \frac{2}{3}2(b_m - a_m) = \frac{4}{3}b_m - \frac{2}{3}a_m = 2(b_{m+1} - a_{m+1}).$$

Son coefficient $(3, 1)$ vaut

$$\frac{1}{3}2(b_m - a_m) + 1 + a_m - 2b_m = 1 + \frac{1}{3}a_m - \frac{4}{3}b_m = 1 + a_{m+1} - 2b_{m+1}.$$

Les coefficients $(2, 2)$ et $(3, 2)$ valent respectivement $2b_m/3 = b_{m+1}$ et $b_m/3 + 1 - b_m = 1 - b_{m+1}$. La dernière colonne reste ${}^t(0, 0, 1)$ et les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls. On a donc $MN_m = N_{m+1}$, d'où $M^{m+1} = N_{m+1}$.

La récurrence établit la même formule. La diagonalisation fournit celle-ci ; la récurrence permet de la vérifier sans refaire le changement de base.

Partie II

Les variables X_j ont un ensemble de valeurs fini, inclus dans $\{1, 2, 3\}$. Elles admettent donc une espérance et une variance.

1. Étude de la loi des variables aléatoires X_j

a) Question adaptée au programme actuel : les conditionnelles sont d'abord calculées pour $j \geq 3$, puis les deux premières étapes sont traitées à partir des transitions du modèle, sans conditionnement par un événement impossible.

Pour $j \geq 3$, les trois états ont une probabilité positive. On peut en effet choisir une histoire de commandes qui utilise exactement un, deux ou trois fournisseurs ; toute histoire de longueur j a la probabilité positive $(1/3)^j$.

Le nombre de fournisseurs servis ne peut pas diminuer. Si un seul fournisseur est servi, le prochain consommateur choisit celui-ci avec probabilité $1/3$; les deux autres choix conduisent à l'état 2. Si deux fournisseurs sont servis, les deux choix déjà rencontrés

maintiennent l'état 2, et le troisième conduit à l'état 3. Enfin, l'état 3 est conservé. Ces probabilités résultent du choix uniforme du prochain consommateur, indépendant des commandes précédentes.

En particulier,

$$P(X_{j+1} = 1 \mid X_j = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X_{j+1} = 1 \mid X_j = 2) = 0, \quad P(X_{j+1} = 1 \mid X_j = 3) = 0.$$

Les événements $[X_j = 1]$, $[X_j = 2]$, $[X_j = 3]$ forment un système complet. Les probabilités totales donnent

$$P(X_{j+1} = 1) = \frac{1}{3}P(X_j = 1),$$

$$P(X_{j+1} = 2) = \frac{2}{3}P(X_j = 1) + \frac{2}{3}P(X_j = 2),$$

$$P(X_{j+1} = 3) = \frac{1}{3}P(X_j = 2) + P(X_j = 3).$$

Pour $j = 1$, seul l'état 1 est possible : on obtient directement les probabilités $1/3$, $2/3$, 0 à l'étape suivante. Les trois relations restent donc valables, les termes correspondant aux états impossibles étant nuls.

Pour $j = 2$, seuls les états 1 et 2 ont une probabilité positive. La formule des probabilités totales appliquée à ces deux états donne les mêmes relations, avec $P(X_2 = 3) = 0$. Ainsi, les récurrences sont valables pour tout $j \geq 1$.

b) Les trois relations de a) sont précisément les trois lignes de

$$U_{j+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} U_j = MU_j.$$

L'annale représente les probabilités par une colonne : les colonnes de M décrivent donc les transitions depuis un état fixé et ont une somme égale à 1.

Pour retrouver la convention ligne des graphes probabilistes, on pose $V_j = {}^t(U_j)$ et $A = {}^tM$. Alors A_{rs} est la probabilité de passer de l'état r à l'état s , chaque ligne de A a une somme égale à 1, et

$$V_{j+1} = V_j A.$$

Les calculs suivants conservent la convention colonne initiale.

c) Méthode 1 — Utiliser les puissances matricielles.

La première commande atteint exactement un fournisseur, donc

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La récurrence de b) donne $U_j = M^{j-1}U_1$. On retient ainsi la première colonne de la matrice calculée en I.2.b :

$$U_j = \begin{pmatrix} (1/3)^{j-1} \\ 2((2/3)^{j-1} - (1/3)^{j-1}) \\ 1 + (1/3)^{j-1} - 2(2/3)^{j-1} \end{pmatrix}.$$

Ces formules incluent $j = 1$ et $j = 2$, même si tous les états ne sont pas encore possibles.

Méthode 2 — Compter directement les fournisseurs rencontrés.

Pour avoir $X_j = 1$, les j commandes doivent toutes aller à un même fournisseur. Pour un

fournisseur fixé, la probabilité est $(1/3)^j$ par indépendance. Les trois événements sont disjoints, puisque $j \geq 1$, donc

$$P(X_j = 1) = 3(1/3)^j = (1/3)^{j-1}.$$

Pour un couple fixé de fournisseurs, la probabilité que toutes les commandes restent dans ce couple est $(2/3)^j$. On retranche les deux événements disjoints où toutes les commandes vont à un seul de ces fournisseurs. La probabilité d'utiliser exactement les deux est donc $(2/3)^j - 2(1/3)^j$.

Il y a trois couples possibles, et un historique ayant rencontré exactement deux fournisseurs détermine un seul de ces couples. Les événements correspondants sont disjoints. Ainsi,

$$P(X_j = 2) = 3(2/3)^j - 6(1/3)^j = 2((2/3)^{j-1} - (1/3)^{j-1}).$$

Enfin, comme X_j vaut 1, 2 ou 3,

$$P(X_j = 3) = 1 - P(X_j = 1) - P(X_j = 2) = 1 + 3(1/3)^j - 3(2/3)^j.$$

On retrouve la loi obtenue par la méthode matricielle. La première méthode réutilise la diagonalisation; la seconde exploite directement l'indépendance des choix et vérifie les formules sans calcul matriciel.

- d)** Les nombres $1/3$ et $2/3$ appartiennent à $]0, 1[$. Leurs puissances tendent donc vers 0. Par c),

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} U_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La probabilité que les trois fournisseurs aient reçu une commande tend vers 1. Cette limite est établie par les formules explicites; aucun théorème général sur les états stables

n'est nécessaire.

2. Calcul de l'espérance de X_j

- a) Question adaptée au programme actuel : l'indice i imprimé dans JU_i et LU_i est rectifié en j , indice utilisé dans la définition des matrices colonnes et dans la relation demandée.

On effectue le produit :

$$LM = \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}, \frac{4}{3} + 1, 3 \right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3 \right).$$

Les composantes de $\alpha L + \beta J$ sont $\alpha + \beta$, $2\alpha + \beta$, $3\alpha + \beta$. Les deux premières donnent $\alpha = 2/3$, $\beta = 1$, et la troisième vérifie $3(2/3) + 1 = 3$. Ainsi,

$$LM = \frac{2}{3}L + J.$$

La somme des probabilités de la loi de X_j vaut 1, donc $JU_j = 1$. Le transfert pour une variable finie donne

$$LU_j = P(X_j = 1) + 2P(X_j = 2) + 3P(X_j = 3) = E(X_j).$$

En multipliant $U_{j+1} = MU_j$ à gauche par L , on obtient

$$E(X_{j+1}) = LMU_j = \frac{2}{3}LU_j + JU_j = \frac{2}{3}E(X_j) + 1.$$

b) Méthode 1 — Résoudre la récurrence arithmético-géométrique.

On a $X_1 = 1$, donc $E(X_1) = 1$. Le nombre 3 vérifie $3 = (2/3)3 + 1$. En posant $e_j = E(X_j)$, la récurrence devient

$$e_{j+1} - 3 = \frac{2}{3}(e_j - 3).$$

La suite $(e_j - 3)$ est géométrique de premier terme -2 . Par conséquent,

$$E(X_j) = 3 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{j-1} = 3 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^j.$$

Comme $(2/3)^j \rightarrow 0$, on a $E(X_j) \rightarrow 3$.

Méthode 2 — Utiliser des indicatrices.

Pour chaque fournisseur $\ell \in \{1, 2, 3\}$, notons $I_{\ell,j}$ l'indicatrice de l'événement « le fournisseur ℓ a reçu au moins une des j commandes ». Alors $X_j = I_{1,j} + I_{2,j} + I_{3,j}$.

Pour un fournisseur fixé, chaque commande l'évite avec probabilité $2/3$. Par indépendance des commandes, $P(I_{\ell,j} = 0) = (2/3)^j$. Ainsi, $E(I_{\ell,j}) = 1 - (2/3)^j$. La linéarité de l'espérance, qui ne demande pas l'indépendance des indicatrices, donne

$$E(X_j) = \sum_{\ell=1}^3 E(I_{\ell,j}) = 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^j \right).$$

Cette méthode retrouve la même limite. La récurrence suit la structure temporelle du problème; les indicatrices permettent souvent de calculer une espérance sans déterminer toute la loi.

- c) D'après b), $E(X_j) < 3$ pour tout j fini. Il suffit donc d'étudier les deux bornes inférieures. Comme $\ln(2/3) < 0$,

$$E(X_j) \geq 2,9 \iff (2/3)^j \leq 1/30 \iff j \geq \frac{\ln 30}{\ln(3/2)}.$$

La dernière borne vaut environ 8,388. Le plus petit entier admissible est donc 9. Sous la forme demandée avec une inégalité stricte sur l'entier, il faut $j > 8$, donc $j_0 = 8$.

De même,

$$E(X_j) \geq 2,99 \iff (2/3)^j \leq 1/300 \iff j \geq \frac{\ln 300}{\ln(3/2)}.$$

La borne vaut environ 14,067, donc le plus petit entier admissible est 15. Il faut $j > 14$, donc $j_1 = 14$.

Pour vérifier les arrondis sans ambiguïté, on peut écrire $2^8/3^8 > 1/30 \geq 2^9/3^9$ et $2^{14}/3^{14} > 1/300 \geq 2^{15}/3^{15}$, égalités et inégalités qui se contrôlent par produits d'entiers positifs.

3. Étude de la loi de T

- a) Le nombre de fournisseurs servis ne diminue pas. Avoir atteint les trois fournisseurs au plus tard à la commande j équivaut donc à en avoir atteint trois après cette commande :

$$[T \leq j] = [X_j = 3].$$

Pour $j \geq 2$, l'événement $[T = j]$ est la différence entre les événements emboîtés $[T \leq j]$ et $[T \leq j - 1]$. Ainsi,

$$P(T = j) = P(X_j = 3) - P(X_{j-1} = 3).$$

À la première commande, un seul fournisseur est servi, donc $P(T = 1) = 0$. On verra en c) que le premier instant où tous les fournisseurs ont été servis est fini presque sûrement.

- b) Méthode 1 — Soustraire deux valeurs de la fonction de répartition.

Posons $r = 2/3$ et $s = 1/3$. D'après II.1.c et a), pour $j \geq 2$,

$$P(T = j) = 3(s^j - s^{j-1}) - 3(r^j - r^{j-1}).$$

Or $3(s - 1) = -2$ et $-3(r - 1) = 1$. En factorisant les puissances,

$$P(T = j) = r^{j-1} - 2s^{j-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}.$$

Pour $j = 2$, le résultat vaut 0. Pour $j \geq 3$, il vaut $(2^{j-1} - 2)/3^{j-1} > 0$, conformément au fait qu'au moins trois commandes sont nécessaires.

Méthode 2 — Étudier la commande qui complète la collection.

Pour $j \geq 3$, l'événement $[T = j]$ se produit si les $j - 1$ premières commandes ont atteint exactement deux fournisseurs et si la commande j atteint le troisième. L'événement $[X_{j-1} = 2]$ a une probabilité positive ; le choix indépendant de la commande suivante

atteint l'unique fournisseur manquant avec probabilité $1/3$. Par conséquent,

$$P(T = j) = \frac{1}{3}P(X_{j-1} = 2) = \frac{2}{3}(r^{j-2} - s^{j-2}) = r^{j-1} - 2s^{j-1}.$$

Pour $j = 2$, il est impossible d'avoir déjà rencontré trois fournisseurs et la formule donne encore 0, sans conditionnement par un événement impossible.

La première méthode utilise une différence de probabilités cumulées; la seconde isole la transition qui termine l'attente.

c) Pour $j \geq 2$, les sommes géométriques finies donnent

$$P(T \leq j) = \sum_{k=2}^j (r^{k-1} - 2s^{k-1}) = \frac{r(1 - r^{j-1})}{1 - r} - 2\frac{s(1 - s^{j-1})}{1 - s}.$$

Comme $r/(1 - r) = 2$ et $s/(1 - s) = 1/2$, il vient

$$P(T \leq j) = 2(1 - r^{j-1}) - (1 - s^{j-1}) = 1 - 2r^{j-1} + s^{j-1} = 1 + 3s^j - 3r^j.$$

Cette formule donne également 0 pour $j = 1$. En faisant tendre j vers $+\infty$, on obtient $P(T \leq j) \rightarrow 1$. La somme des probabilités de la loi vaut donc 1 :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} P(T = j) = 1.$$

Les événements $[T \leq j]$ croissent vers l'événement «les trois fournisseurs finissent par être servis». Par continuité croissante des probabilités, cet événement a une probabilité égale à 1. L'attente T est donc finie presque sûrement.

4. Calcul de l'espérance de T

- a) Pour $n \geq 1$, une factorisation puis la somme géométrique finie donnent, pour $x \in [0, 1[$,

$$\sum_{j=2}^{n+1} x^j = x^2 \sum_{k=0}^{n-1} x^k = x^2 \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

L'égalité porte sur un polynôme et une fonction dérivable pour $x < 1$. On dérive cette égalité finie, et non une série infinie. Comme $x^2(1 - x^n) = x^2 - x^{n+2}$, la règle du quotient donne

$$\sum_{j=2}^{n+1} jx^{j-1} = \frac{(2x - (n+2)x^{n+1})(1-x) + x^2 - x^{n+2}}{(1-x)^2},$$

soit

$$\sum_{j=2}^{n+1} jx^{j-1} = \frac{2x - x^2 - (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

Pour $0 < x < 1$ fixé, les suites x^n et nx^n tendent vers 0, par les limites des suites géométriques et les croissances comparées. Le dénominateur est strictement positif et indépendant de n . Les sommes partielles convergent donc vers

$$S(x) = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - 1.$$

Pour $x = 0$, tous les termes $j0^{j-1}$ sont nuls puisque $j \geq 2$; la formule donne également $S(0) = 0$. Elle est ainsi valable sur tout $[0, 1[$.

- b) Méthode 1 — Calculer le premier moment à partir de la loi.

La variable T est positive. De plus, pour $j \geq 2$,

$$0 \leq jP(T = j) \leq j(2/3)^{j-1}.$$

La série du majorant converge, de somme $S(2/3)$ d'après a). La série définissant l'espérance de T est donc convergente et même absolument convergente. La linéarité des séries convergentes autorise alors

$$E(T) = S(2/3) - 2S(1/3).$$

Les valeurs obtenues en a) sont

$$S(2/3) = \frac{1}{(1/3)^2} - 1 = 8, \quad S(1/3) = \frac{1}{(2/3)^2} - 1 = \frac{5}{4}.$$

Par conséquent,

$$E(T) = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2}.$$

Il faut en moyenne 5,5 commandes pour que chacun des trois fournisseurs en ait reçu au moins une.

Méthode 2 — Sommer les probabilités d'attente.

Établissons d'abord l'identité nécessaire dans ce cas particulier. Pour tout entier $N \geq 1$, en additionnant un nombre fini de probabilités puis en regroupant les contributions de chaque valeur de T ,

$$\sum_{k=0}^{N-1} P(T > k) = \sum_{t=1}^{+\infty} \min(t, N) P(T = t).$$

En effet, pour $T = t$, l'événement $T > k$ est réalisé pour exactement $\min(t, N)$ valeurs de k entre 0 et $N - 1$. Les contributions sont positives et le nombre de sommes extérieures

est fini. Comme l'existence de $E(T)$ a été établie, on a

$$0 \leq E(T) - \sum_{k=0}^{N-1} P(T > k) = \sum_{t \geq N} (t - N)P(T = t) \leq \sum_{t \geq N} tP(T = t) \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$E(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(T > k).$$

Or $P(T > 0) = 1$ et, pour $k \geq 1$, II.3.c donne $P(T > k) = 3r^k - 3s^k$. Les deux séries géométriques convergent. D'où

$$E(T) = 1 + 3\frac{r}{1-r} - 3\frac{s}{1-s} = 1 + 6 - \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

La première méthode est adaptée à une loi explicite; la seconde est utile lorsque les probabilités de dépasser un délai sont plus simples que les probabilités ponctuelles.

Partie III

1. Étude d'un algorithme

a) Calculons une différence de termes consécutifs :

$$F(j+1) - F(j) = 3(1/3)^j(1/3 - 1) - 3(2/3)^j(2/3 - 1) = \frac{2^j - 2}{3^j}.$$

Cette différence est nulle pour $j = 1$ et strictement positive pour $j \geq 2$. La suite est donc croissante au sens large, avec $F(1) = F(2) = 0$, puis elle est strictement croissante à partir de l'indice 2.

On a $F(1) = 1 + 1 - 2 = 0$. Les deux puissances géométriques tendent vers 0, donc

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} F(j) = 1.$$

Pour tout $j \geq 1$, $1 - F(j) = 3(2/3)^j(1 - 2^{-j}) > 0$, donc $F(j) < 1$.

b) Fixons $y \in]0, 1[$. Comme $F(j) \rightarrow 1 > y$, l'ensemble des entiers $j \geq 2$ tels que $F(j) \geq y$ est non vide. Il possède un plus petit élément, noté j .

Puisque $F(2) = 0 < y$, ce premier indice vérifie $j \geq 3$. Sa minimalité donne $F(j-1) < y$, tandis que sa définition donne $y \leq F(j)$. L'existence est donc établie.

Pour l'unicité, supposons que deux indices $j < \ell$ vérifient l'encadrement. La croissance de F et $\ell - 1 \geq j$ donnent $F(\ell - 1) \geq F(j) \geq y$, ce qui contredit $F(\ell - 1) < y$. L'entier recherché est donc unique.

c) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python. Le programme complet est

Python

```
def seuil(y):
    n = 1
    p = 2
    q = 3
    z = (1 - y) / 3
    while p - 1 > q * z:
        n = n + 1
        p = 2 * p
        q = 3 * q
    return n
```

Aucun import n'est nécessaire. La fonction reçoit $y \in]0, 1[$ et renvoie l'entier final n . La variable z est le seuil $(1 - y)/3$. Les variables p et q contiennent les puissances successives de 2 et de 3. La boucle augmente n jusqu'à ce que la condition cesse d'être vérifiée.

À l'initialisation, pour $k = 0$, on a $n = 1$, $p = 2$, $q = 3$. À chaque passage, n augmente de 1, p est multiplié par 2 et q par 3. Une récurrence immédiate sur le nombre de passages donne

$$n = k + 1, \quad p = 2^{k+1}, \quad q = 3^{k+1}.$$

Posons $R(m) = (2^m - 1)/3^m = (2/3)^m - (1/3)^m$. À chaque test de la boucle, $(p-1)/q = R(n)$. Comme $q > 0$, le test $p-1 > qz$ est équivalent à $R(n) > z$. Le calcul du quotient est ainsi évité dans le code. Comme $R(n) \rightarrow 0$ et $z = (1-y)/3 > 0$, la boucle finit par s'arrêter.

Les tests aux valeurs $n = 1$ et $n = 2$ utilisent tous deux $R(1) = R(2) = 1/3$. Puisque $z < 1/3$, ces deux tests sont vrais : la valeur finale j vérifie $j \geq 3$. L'avant-dernière et la dernière valeur testées sont donc bien définies et valent

$$\frac{2^{j-1} - 1}{3^{j-1}} \quad \text{et} \quad \frac{2^j - 1}{3^j}.$$

Le dernier passage dans la boucle a eu lieu parce que le premier de ces nombres était strictement supérieur à z ; l'arrêt signifie que le second est inférieur ou égal à z . Ainsi,

$$R(j-1) > \frac{1-y}{3} \geq R(j).$$

Or $F(m) = 1 - 3R(m)$. En multipliant par 3, puis en soustrayant à 1 en tenant compte du changement de sens des inégalités, on obtient

$$F(j-1) < y \leq F(j).$$

L'algorithme renvoie donc l'unique entier de b). Le code a été exécuté, notamment pour les deux seuils de III.2.b ; il renvoie respectivement 5 et 15.

d) On note $j = j(y)$ l'unique entier de b) et $\delta = 1 - y > 0$. D'abord, $j(y) \rightarrow +\infty$ lorsque $y \rightarrow 1^-$. En effet, pour tout entier N fixé, $F(N) < 1$; dès que $y > F(N)$, l'inégalité $y \leq F(j(y))$ impose $j(y) > N$.

Posons $r = 2/3$. Les inégalités $F(j-1) < y \leq F(j)$ sont équivalentes à

$$3r^j(1 - 2^{-j}) \leq \delta < 3r^{j-1}(1 - 2^{-(j-1)}).$$

Comme $j \geq 3$, le facteur $1 - 2^{-j}$ est supérieur ou égal à $1/2$, et l'autre facteur est inférieur à 1. Il vient

$$\frac{3}{2}r^j \leq \delta < 3r^{j-1} = \frac{9}{2}r^j.$$

Tous les nombres sont strictement positifs, donc le logarithme croissant donne

$$\ln(3/2) \leq \ln \delta - j \ln r < \ln(9/2).$$

On divise par $j > 0$. Comme $j \rightarrow +\infty$, les deux bornes constantes divisées par j tendent vers 0. Ainsi,

$$\frac{\ln(1-y)}{j(y)} \rightarrow \ln(2/3).$$

La limite est non nulle. En inversant ce quotient et en utilisant $\ln(2/3) = -\ln(3/2)$, on conclut

$$j(y) \sim \frac{-\ln(1-y)}{\ln(3/2)} = \frac{\ln(1/(1-y))}{\ln(3/2)} \quad (y \rightarrow 1^-).$$

Le passage au logarithme a été justifié par un encadrement explicite ; il ne repose pas sur une règle non vérifiée de composition d'équivalents.

2. Application à l'étude de la fonction de répartition de T

a) D'après II.3.c,

$$P(T \leq j) = 1 + 3(1/3)^j - 3(2/3)^j = F(j) \quad (j \geq 1).$$

Les valeurs de la suite sont donc celles de la fonction de répartition de T aux entiers positifs. En particulier, $F(1) = F(2) = 0$, puisque T prend ses valeurs dans $\{3, 4, \dots\}$.

b) La suite F est strictement croissante pour les indices au moins égaux à 2. Pour déterminer le plus petit entier donnant une probabilité au moins égale à un seuil, il suffit donc de vérifier les deux entiers consécutifs qui l'encadrent.

Pour le seuil 0,5, le code de III.1.c renvoie 5. On confirme exactement :

$$F(4) = 1 + \frac{3}{81} - \frac{48}{81} = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}, \quad F(5) = 1 + \frac{3}{243} - \frac{96}{243} = \frac{50}{81} > \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $P(T \leq j) \geq 0,5$ si et seulement si $j \geq 5$, c'est-à-dire $j > 4$. Dans la formulation demandée, $j_0 = 4$.

Pour le seuil 0,99, le code renvoie 15. Les vérifications exactes donnent

$$F(14) = \frac{525980}{531441} < \frac{99}{100}, \quad F(15) = \frac{4750202}{4782969} > \frac{99}{100}.$$

La première inégalité s'obtient car $100 \times 525980 = 52598000 < 52612659 = 99 \times 531441$.

La seconde s'obtient car $100 \times 4750202 = 475020200 > 473513931 = 99 \times 4782969$.

Donc $P(T \leq j) \geq 0,99$ si et seulement si $j \geq 15$, c'est-à-dire $j > 14$. On a $j_1 = 14$.

Relevé des adaptations

- II.1.a–b : les probabilités conditionnelles sont demandées pour $j \geq 3$, lorsque les trois états ont une probabilité positive. Pour $j = 1, 2$, les mêmes relations sont établies par les transitions du modèle et les seuls états possibles. La convention colonne du PDF est conservée et reliée à la convention ligne par transposition.
- II.2.a : les indices i imprimés dans JU_i et LU_i sont harmonisés en j , indice défini dans tout le problème.
- III.1.c : Code adapté en Python ; les initialisations, les mises à jour et la valeur finale sont conservées. Le test est multiplié par $q > 0$, ce qui lui donne une forme mathématiquement équivalente sans division des grandes puissances entières. La fonction renvoie cette valeur, que `print` permet d'afficher, et son argument est précisé.