



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

1990

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

1. On considère la fonction définie pour tout réel $x \geq 0$ par

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2(1+x)} - \ln(1+x).$$

a) Calculer f' , étudier f et tracer sa courbe représentative.

b) En déduire successivement que, pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{x^3}{6}. \quad (1)$$

2. Soient n, p, k des entiers naturels non nuls tels que $n \geq 2$ et $k \geq 2$.

a) En réduisant les expressions au même dénominateur, établir que

$$\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{2k^2}. \quad (3)$$

b) Dédire des résultats qui précèdent l'inégalité

$$0 \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} f\left(\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{12(n-1)^2}. \quad (4)$$

3. On se propose d'étudier la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

À cet effet, on introduit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n - 1/n$.

a) Établir l'encadrement

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}.$$

- b)** En déduire le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) , et prouver qu'elles sont adjacentes. On rappelle que deux suites sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, leur différence ayant pour limite 0.

- 4.** On note γ la limite commune des suites (u_n) et (v_n) . Pour évaluer numériquement γ , on se propose d'utiliser leur moyenne arithmétique

$$m_n = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

- a)** Prouver l'inégalité

$$|m_n - \gamma| \leq \frac{1}{2n}.$$

- b)** Écrire en Python un algorithme permettant de calculer m_n pour un entier naturel non nul n donné. Préciser en particulier m_5 et m_{50} , et en déduire des valeurs approchées de γ à 0,1 et 0,01 près. Que constate-t-on a posteriori sur la qualité de l'approximation réalisée par m_5 ?

On pourra utiliser `np.log(x)`, après `import numpy as np` : pour un réel x strictement positif, cette commande renvoie son logarithme népérien. Dans `range(1, n + 1)`, les entiers parcourus sont $1, 2, \dots, n$.

- 5.** On améliore dans cette question la majoration de $|m_n - \gamma|$ à l'aide de l'ensemble des résultats précédents.

- a)** Comparer $f(1/k)$ et $m_{k+1} - m_k$.

- b)** Déduire de l'inégalité (4) que, si n et p sont des entiers naturels non nuls tels que $n \geq 2$, alors

$$0 \leq m_{n+p} - m_n \leq \frac{1}{12(n-1)^2}.$$

Quel encadrement de γ en déduit-on en faisant tendre p vers l'infini ? À l'aide de la

valeur de m_{50} calculée à la question 4.b, quel encadrement de γ obtient-on finalement ?

Partie II

On considère une urne remplie de n boules, avec $n \geq 1$, numérotées $1, 2, \dots, n$. On extrait ces n boules, une à une et sans remise, chaque boule restante étant équiprobable à chaque tirage. On désigne par $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ les numéros obtenus, dans cet ordre.

Pour $1 \leq p \leq n$, on note X_p le plus grand des p numéros obtenus au cours des p premiers tirages :

$$X_p = \max(Z_1, Z_2, \dots, Z_p).$$

1. On se propose de déterminer $P(Z_p > X_{p-1})$ pour $1 < p \leq n$. On pose $N_n = \{1, \dots, n\}$. On demande de préciser :

- a) Le nombre de parties A à p éléments choisis dans N_n .
- b) Le nombre de suites $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts d'une partie donnée A à p éléments de N_n .
- c) Le nombre de suites $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts de N_n .
- d) Le nombre de suites $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts d'une partie donnée A à p éléments de N_n , et telles que le plus grand des p éléments soit situé en p -ième position.
- e) Le nombre de suites $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts de N_n , et telles que le plus grand des p éléments soit situé en p -ième position.
- f) La probabilité $P(Z_p > X_{p-1})$ pour $1 < p \leq n$.

2. Pour $1 < p \leq n$, on note B_p la variable aléatoire égale à 1 si l'événement $[Z_p > X_{p-1}]$ est réalisé, et à 0 sinon. Montrer que $E(B_p) = 1/p$, puis donner l'expression et l'interprétation de $E(B_2 + B_3 + \dots + B_n)$.

Pour $n = 1$, la somme de ces indicatrices est la somme vide, égale à 0.

3. Dans l'algorithme suivant, $n \geq 2$ et la liste Python Z contient les entiers $1, 2, \dots, n$ dans un ordre quelconque. L'élément $Z[p - 1]$ correspond au numéro mathématique Z_p : les indices de liste commencent à 0.

Python

```
X = Z[0]
for p in range(1, n):
    if Z[p] > X:
        X = Z[p]
```

La boucle parcourt les indices $1, 2, \dots, n - 1$. Dans les questions suivantes, on compte uniquement les affectations à X , initialisation comprise ; les affectations des données et celles liées au contrôle de la boucle ne sont pas comptées.

- a) Indiquer les valeurs successivement prises par X au cours de l'algorithme :
- d'une part lorsque $Z_1 = 1, Z_2 = 2, \dots, Z_n = n$;
 - d'autre part lorsque $Z_1 = n, Z_2 = n - 1, \dots, Z_n = 1$.
- b) On revient au cas général. Indiquer la valeur contenue dans X à l'issue de l'algorithme. Déterminer le nombre de comparaisons $>$ effectuées entre les valeurs de deux variables, ainsi que les nombres maximal et minimal d'affectations à X .
- c) À l'aide des résultats précédents, exprimer l'espérance E_n du nombre d'affectations à X en fonction de u_n , puis expliciter à l'aide du nombre γ des réels a et b tels que

$$E_n = a \ln n + b + \varepsilon_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$