



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

1989

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, a et n désignent deux entiers naturels non nuls. On étudie un marché sur lequel na consommateurs achètent chacun un bien auprès de l'un des n fournisseurs $F_1, \dots, F_n$. Les choix des consommateurs sont indépendants et chaque fournisseur est choisi avec la probabilité $1/n$.

La partie I étudie ce marché. La partie II étudie la loi asymptotique du nombre de clients d'un fournisseur lorsque n tend vers l'infini.

Partie I

Pour $1 \leq i \leq n$, X_i indique le nombre de consommateurs ayant acheté le bien chez F_i . On note Y le nombre de fournisseurs n'ayant eu aucun client ; Y/n est leur proportion.

1. Étude des variables aléatoires X_i , pour $1 \leq i \leq n$.

- a) Déterminer la loi commune, l'espérance et la variance des variables X_i , en précisant $P(X_i = k)$ pour tout entier naturel k .
- b) Calculer le mode de X_i , c'est-à-dire le ou les entiers k tels que $P(X_i = k)$ soit maximale. Pour $n \geq 2$, on pourra étudier le rapport

$$r_k = \frac{P(X_i = k+1)}{P(X_i = k)} \quad (0 \leq k \leq na).$$

Traiter séparément $n = 1$.

2. Coefficient de corrélation des variables X_i .

Dans cette question, $n \geq 2$ et i, j sont distincts, avec $1 \leq i, j \leq n$.

- a) Justifier l'identité $X_1 + \dots + X_n = na$ et, en l'élevant au carré, déterminer la valeur commune des espérances $E(X_i X_j)$ puis des covariances $\text{Cov}(X_i, X_j)$.
- b) En déduire le coefficient de corrélation linéaire de X_i et X_j . Interpréter le cas $n = 2$, en rappelant à quelle condition nécessaire et suffisante le coefficient de corrélation de deux variables de variances strictement positives est égal à 1 ou à -1 .

3. Espérance et variance de Y .

Pour $1 \leq i \leq n$, on note B_i la variable égale à 1 lorsque F_i n'a aucun client, et à 0 sinon.

- En exprimant Y à l'aide des B_i , calculer son espérance.
- Déterminer la loi et l'espérance des variables $B_i B_j$, en distinguant $i = j$ et $i \neq j$. En déduire la variance de Y .
- Déterminer les limites de l'espérance et de la variance de Y/n lorsque n tend vers l'infini.

4. Loi de Y .

On désigne par k un entier tel que $0 \leq k \leq n - 1$; une intersection indexée par l'ensemble vide désigne l'événement certain.

- Quelles valeurs Y peut-elle prendre? Calculer $P(Y = n - 1)$.
- Exprimer $[Y \neq 0]$ à l'aide des événements $[X_i = 0]$, pour $1 \leq i \leq n$. En déduire, à l'aide de la formule de Poincaré ou formule du crible, $P(Y = 0)$.

Pour guider cette utilisation dans le modèle étudié, on rappelle l'identité finie

$$\mathbf{1}_{[Y \neq 0]} = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} B_{i_1} \cdots B_{i_r}.$$

Elle peut être vérifiée en fixant le nombre de B_i égaux à 1 et en utilisant le binôme de Newton.

- Donner dans un tableau une valeur approchée avec deux décimales de $P(Y = 0)$ lorsque $a = 1, 2, 3$ et $n = 1, 2, 3$.

d) Donner, par la même méthode, la probabilité conditionnelle

$$P \left(\bigcap_{i=k+1}^n [X_i \neq 0] \middle| \bigcap_{i=1}^k [X_i = 0] \right).$$

On pourra appliquer l'identité de b) aux fournisseurs restants sous cette probabilité conditionnelle.

e) Calculer la probabilité que les k fournisseurs $F_1, \dots, F_k$ n'aient aucun client. En remarquant que

$$\begin{aligned} & P \left(\left(\bigcap_{i=1}^k [X_i = 0] \right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^n [X_i \neq 0] \right) \right) \\ &= P \left(\bigcap_{i=1}^k [X_i = 0] \right) P \left(\bigcap_{i=k+1}^n [X_i \neq 0] \middle| \bigcap_{i=1}^k [X_i = 0] \right), \end{aligned}$$

donner la probabilité que $F_1, \dots, F_k$ n'aient aucun client et que $F_{k+1}, \dots, F_n$ en aient chacun au moins un.

f) En dénombrant le nombre de façons de choisir les k fournisseurs qui resteront sans clients, en déduire $P(Y = k)$.

Partie II

Dans cette partie, k est un entier naturel fixé et $p_n(k)$ désigne la probabilité, calculée en I.1, qu'un fournisseur donné ait exactement k clients. On étudie la suite $n \mapsto p_n(k)$.

1. Étude de la suite $(p_n(0))$.

Sur $]0, 1[$, on définit

$$f_0(x) = \frac{a}{x} \ln(1-x) + a, \quad g_0(x) = x^2 f'_0(x).$$

- a) Donner l'expression de g_0 et étudier son signe.
- b) Étudier les variations de f_0 et déterminer sa limite L lorsque x tend vers 0.
- c) On pose $f_0(0) = L$. Déterminer la limite de $f'_0(x)$ lorsque x tend vers 0, montrer que f_0 est de classe C^1 sur $[0, 1[$ et donner sa représentation graphique.

Pour établir les limites en 0, on pourra appliquer Taylor-Young directement aux fonctions $x \mapsto \ln(1 - x)$ et $x \mapsto -x/(1 - x) - \ln(1 - x)$; la dérivée à l'origine est celle à droite.

- d) Exprimer $p_n(0)$ en fonction de $f_0(1/n)$ pour $n \geq 2$, puis en déduire la limite et le sens de variation de la suite $(p_n(0))$, en tenant compte du cas $n = 1$.

2. Étude de la loi limite du nombre de clients par fournisseur.

- a) Déterminer la limite $p(k)$ de $p_n(k)$ lorsque n tend vers l'infini et reconnaître la loi limite. Ce résultat était-il prévisible?
- b) Donner l'espérance, la variance et calculer le mode de cette loi limite.

3. Étude de la suite $(p_n(k))$ selon k .

On définit

$$f_k(x) = \left(\frac{a}{x} - k\right) \ln(1 - x) + a + \sum_{j=0}^{k-1} \ln\left(1 - \frac{jx}{a}\right), \quad g_k(x) = x^2 f'_k(x),$$

où $k \geq 1$ est distinct de

$$b = a + \frac{1}{2} - \sqrt{a + \frac{1}{4}}, \quad c = a + \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}.$$

Pour $k = 1$, on travaille sur $]0, 1[$. Pour $k \geq 2$, on travaille sur $]0, d_k[$, où

$d_k = \min(1, a/(k - 1))$, afin que tous les logarithmes soient définis. Les évaluations en

$1/n$ sont considérées pour n assez grand.

- a) Comparer $\ln(p_n(k)/p(k))$ et $f_k(1/n)$.
- b) Donner le développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto xf_k(x)$. En déduire, selon la position de k par rapport à b, c , le signe de $f_k(1/n)$ et la position de $p_n(k)$ par rapport à $p(k)$ lorsque n est assez grand.

Pour ce calcul, on écrira $h_k(x) = xf_k(x)$ sous une forme sans division par x , on prolongera cette fonction en 0 et on calculera ses dérivées en 0 avant d'appliquer Taylor-Young.

- c) Donner le développement limité d'ordre 2 en 0 de g_k . En déduire que les suites $(f_k(1/n))$ et $(p_n(k))$ sont monotones à partir d'un certain rang, et préciser leur sens de variation selon la position de k par rapport à b, c .

On pourra utiliser $g_k(x) = xh'_k(x) - h_k(x)$ et appliquer Taylor-Young directement au prolongement de g_k .