



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

1989

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

Toutes les variables considérées dans cette partie ont un nombre fini de valeurs. Elles possèdent donc tous les moments utilisés.

1. Étude des variables X_i .

- a) Pour chaque consommateur, l'achat chez F_i est un succès de probabilité $1/n$. Les na choix sont indépendants. Pour $n \geq 2$, X_i suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(na, 1/n)$:

$$P(X_i = k) = \binom{na}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{na-k} \quad (0 \leq k \leq na),$$

et $P(X_i = k) = 0$ pour les entiers $k > na$. Les formules de la loi binomiale donnent

$$E(X_i) = a, \quad V(X_i) = a \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Si $n = 1$, tous les consommateurs vont chez l'unique fournisseur : $X_1 = a$ avec probabilité 1. Sa loi est certaine, son espérance vaut a et sa variance vaut 0. Les expressions des moments ci-dessus restent valables ; cette présentation évite toute puissance ambiguë dans la formule de masse aux bords.

- b) Question adaptée au programme actuel : le cas certain $n = 1$ est séparé et le rapport est étudié là où son dénominateur est strictement positif.

Pour $n = 1$, l'unique mode est a . Supposons $n \geq 2$. Toutes les probabilités pour $0 \leq k \leq na$ sont strictement positives. En simplifiant les factorielles et les puissances, pour $0 \leq k < na$,

$$r_k = \frac{na - k}{k + 1} \frac{1/n}{1 - 1/n} = \frac{na - k}{(k + 1)(n - 1)}.$$

Pour $k = na$, la probabilité au numérateur est nulle et le rapport vaut aussi 0, conformément à cette expression. Comme $(k + 1)(n - 1) > 0$,

$$r_k > 1 \iff na - k > (k + 1)(n - 1) \iff k < a - 1 + \frac{1}{n}.$$

Le nombre $a - 1 + 1/n$ est strictement entre les entiers $a - 1$ et a . Par conséquent, $r_k > 1$ pour $0 \leq k \leq a - 1$ et $r_k < 1$ pour $a \leq k \leq na$. Les masses croissent strictement jusqu'à $k = a$, puis décroissent strictement. L'unique mode de X_i est donc a , pour tout $n \geq 1$.

2. Corrélation de X_i et X_j .

a) Méthode 1 — Exploiter le nombre total de clients, comme demandé.

Chaque consommateur achète exactement une fois. Pour chaque issue,

$$X_1 + \dots + X_n = na.$$

En élevant au carré et en prenant les espérances,

$$n^2 a^2 = \sum_{i=1}^n E(X_i^2) + \sum_{i \neq j} E(X_i X_j).$$

Les choix étant équiprobables, une permutation des noms des fournisseurs ne change pas la loi du modèle. Les espérances $E(X_i X_j)$, pour $i \neq j$, ont donc une même valeur m . Les $n(n-1)$ couples de la seconde somme sont ordonnés. Par I.1 et Koenig-Huygens,

$$E(X_i^2) = a^2 + a \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Il vient

$$n^2 a^2 = na^2 + a(n-1) + n(n-1)m.$$

Puisque $n \geq 2$, la division par $n(n-1)$ est permise et donne

$$E(X_i X_j) = a^2 - \frac{a}{n}.$$

Ainsi,

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = -\frac{a}{n}.$$

Méthode 2 — Décomposer les nombres de clients en indicatrices.

Pour $1 \leq \ell \leq na$, notons $I_{\ell,i}$ l'indicatrice de l'achat du consommateur ℓ chez F_i . Alors

$$X_i = \sum_{\ell=1}^{na} I_{\ell,i}.$$

Si $i \neq j$, un même consommateur ne peut choisir les deux fournisseurs, donc $I_{\ell,i}I_{\ell,j} = 0$. Si $\ell \neq m$, l'indépendance des choix donne $E(I_{\ell,i}I_{m,j}) = 1/n^2$. En développant le produit fini,

$$E(X_i X_j) = \sum_{\ell \neq m} E(I_{\ell,i} I_{m,j}) = \frac{na(na-1)}{n^2} = a^2 - \frac{a}{n}.$$

On retrouve la covariance $-a/n$. La première méthode tire parti de la conservation du total ; la seconde explique la covariance négative par l'impossibilité qu'un même achat bénéficie à deux fournisseurs.

b) Pour $n \geq 2$, la variance commune $a(n-1)/n$ est strictement positive. La corrélation est donc définie et vaut

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{-a/n}{a(n-1)/n} = -\frac{1}{n-1}.$$

Pour deux variables de variances strictement positives, $\rho = 1$ si et seulement si elles sont liées presque sûrement par une relation affine de pente strictement positive ; $\rho = -1$ si et seulement si cette pente est strictement négative. En effet, ces cas expriment respectivement l'égalité ou l'opposition presque sûre de leurs variables centrées réduites.

Lorsque $n = 2$, on a $X_2 = 2a - X_1$, relation de pente -1 , et la formule donne bien $\rho = -1$. Pour $n > 2$, $-1 < \rho < 0$: une hausse des clients de l'un doit être compensée au niveau de l'ensemble des autres, sans imposer une relation affine entre deux fournisseurs précis. Pour $n = 1$, aucune paire de fournisseurs distincts n'existe et la variable certaine a une variance nulle : on ne lui attribue pas de coefficient de corrélation.

3. Espérance et variance de Y .

- a) Pour chaque issue, chaque fournisseur sans client est compté une fois par son indicatrice :

$$Y = B_1 + \dots + B_n.$$

Notons $q_n = (1 - 1/n)^{na}$. La probabilité qu'aucun des na consommateurs ne choisisse un fournisseur donné est q_n . Ainsi, $E(B_i) = q_n$, et la linéarité donne

$$E(Y) = nq_n = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{na}.$$

Pour $n = 1$, $q_1 = 0$ et $Y = 0$ avec certitude, en accord avec cette expression.

- b) Si $i = j$, $B_i B_j = B_i^2 = B_i$ suit la loi de Bernoulli de paramètre q_n ; son espérance est q_n .

Si $i \neq j$, nécessairement $n \geq 2$. Le produit $B_i B_j$ indique que les deux fournisseurs sont sans clients. Chaque consommateur évite ces deux fournisseurs avec probabilité $1 - 2/n$. L'indépendance des choix donne

$$P(B_i B_j = 1) = r_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{na}.$$

Le produit suit donc une loi de Bernoulli de paramètre r_n et $E(B_i B_j) = r_n$. Pour $n = 2$, $r_n = 0$: il est impossible que les deux fournisseurs soient vides puisque $na \geq 1$.

On développe Y^2 , avec des couples ordonnés :

$$E(Y^2) = \sum_i E(B_i) + \sum_{i \neq j} E(B_i B_j) = nq_n + n(n-1)r_n.$$

Koenig-Huygens donne, pour $n \geq 2$,

$$V(Y) = nq_n + n(n-1)r_n - n^2 q_n^2 = nq_n(1 - q_n) + n(n-1)(r_n - q_n^2).$$

Le cas $n = 1$ se traite directement : $V(Y) = 0$. Il ne nécessite aucune expression correspondant à une paire inexistante.

c) Le paramètre a est fixé. Pour $n \geq 2$,

$$\ln q_n = an \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) = -a \frac{\ln(1 - 1/n)}{-1/n}.$$

La dérivabilité de $u \mapsto \ln(1 + u)$ en 0 donne $\ln(1 + u)/u \rightarrow 1$. Ainsi, $\ln q_n \rightarrow -a$, puis, par continuité de l'exponentielle, $q_n \rightarrow e^{-a}$. Comme $E(Y/n) = q_n$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y/n) = e^{-a}.$$

Pour $n > 2$, le même raisonnement avec $u = -2/n$ donne $r_n \rightarrow e^{-2a}$. La règle de variance d'une transformation affine donne

$$V(Y/n) = \frac{q_n}{n} + \frac{n-1}{n} r_n - q_n^2.$$

Chaque terme possède une limite, et la dernière expression tend vers

$$0 + e^{-2a} - e^{-2a} = 0. \text{ Donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(Y/n) = 0.$$

On n'a pas besoin de supposer les indicatrices indépendantes : elles ne le sont généralement pas.

4. Loi de Y .

a) Au moins un fournisseur reçoit un client, donc $Y \leq n - 1$. Toutes les valeurs $0, 1, \dots, n - 1$ sont possibles : pour obtenir $Y = k$, on choisit $n - k$ fournisseurs et on leur attribue d'abord un consommateur chacun ; c'est possible car $na \geq n \geq n - k$. Les consommateurs restants peuvent tous aller chez l'un d'eux. Toute attribution ainsi construite a une probabilité strictement positive.

L'événement $[Y = n - 1]$ signifie que tous les consommateurs choisissent le même fournisseur. Les n choix de ce fournisseur sont incompatibles, chacun ayant probabilité $(1/n)^{na}$. Ainsi,

$$P(Y = n - 1) = n^{1-na}.$$

Pour $n = 1$, cette formule vaut 1 et le support se réduit à $\{0\}$.

- b) Question adaptée au programme actuel : l'identité finie du crible est fournie pour guider le calcul.

On a $[Y \neq 0] = \bigcup_{i=1}^n [X_i = 0]$. Pour vérifier l'identité rappelée, fixons une issue pour laquelle $Y = m$. Le nombre de produits de r indicatrices égaux à 1 est $\binom{m}{r}$. Le membre de droite vaut donc

$$\sum_{r=1}^m (-1)^{r+1} \binom{m}{r} = 1 - (1-1)^m,$$

soit 1 si $m \geq 1$, et 0 si $m = 0$ (somme vide). Il coïncide avec l'indicatrice de $[Y \neq 0]$.

Fixons maintenant r fournisseurs distincts. La probabilité qu'ils soient tous vides est $((n-r)/n)^{na}$: chaque consommateur doit choisir l'un des $n-r$ autres fournisseurs. Il y a $\binom{n}{r}$ ensembles de r fournisseurs. En prenant les espérances dans l'identité et en passant à l'événement complémentaire,

$$P(Y = 0) = 1 - \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \left(\frac{n-r}{n}\right)^{na} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \left(\frac{n-r}{n}\right)^{na}.$$

L'exposant na est strictement positif ; le terme $r = n$ vaut donc 0, sans ambiguïté. Pour $n = 1$, le calcul donne 1.

- c) La formule précédente donne les valeurs arrondies au centième suivantes.

a	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
1	1,00	0,50	0,22
2	1,00	0,88	0,74
3	1,00	0,97	0,92

Pour contrôler ces arrondis, pour $n = 2$ on utilise $1 - 2^{1-2a}$; pour $n = 3$, $1 - 3(2/3)^{3a} + 3(1/3)^{3a}$. Les valeurs exactes pour $n = 3$ sont respectivement $2/9$, $20/27$ et $6050/6561$.

d) Posons $A_k = \bigcap_{i=1}^k [X_i = 0]$, avec $A_0 = \Omega$. Comme $k \leq n-1$,

$$P(A_k) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^{na} > 0.$$

Le conditionnement demandé est donc toujours défini. Pour un ensemble fixé de r fournisseurs parmi $F_{k+1}, \dots, F_n$, la probabilité qu'ils soient eux aussi vides, sachant A_k , vaut

$$\frac{((n-k-r)/n)^{na}}{((n-k)/n)^{na}} = \left(\frac{n-k-r}{n-k}\right)^{na}.$$

On applique l'identité du crible à ces $n-k$ fournisseurs sous la probabilité conditionnelle sachant A_k . Le complément de la réunion des événements « ce fournisseur est vide » signifie qu'ils sont tous non vides. On obtient

$$P\left(\bigcap_{i=k+1}^n [X_i \neq 0] \mid A_k\right) = \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r \binom{n-k}{r} \left(\frac{n-k-r}{n-k}\right)^{na}.$$

Pour $k = n-1$, il ne reste qu'un fournisseur ; la somme vaut 1, comme attendu. Pour $k = 0$, on retrouve b).

e) La probabilité que les k premiers fournisseurs soient vides est $P(A_k) = ((n-k)/n)^{na}$.

La formule des probabilités composées, applicable car $P(A_k) > 0$, et d) donnent

$$P\left(A_k \cap \bigcap_{i=k+1}^n [X_i \neq 0]\right) = \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r \binom{n-k}{r} \left(\frac{n-k-r}{n}\right)^{na}.$$

Cette quantité est la probabilité que l'ensemble des fournisseurs vides soit exactement $\{F_1, \dots, F_k\}$.

f) Il y a $\binom{n}{k}$ ensembles de k fournisseurs : on choisit une partie de taille k dans l'ensemble des n fournisseurs. Les événements « l'ensemble des fournisseurs vides est cette partie » sont deux à deux incompatibles. Ils ont la même probabilité par

symétrie des noms des fournisseurs. Par conséquent,

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r \binom{n-k}{r} \left(\frac{n-k-r}{n} \right)^{na} \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

En dehors de ces entiers, la probabilité est nulle. La formule donne bien n^{1-na} pour $k = n - 1$. Lorsque $n = 1$ et $k = 0$, elle donne 1.

Partie II

1. Étude de $(p_n(0))$.

a) La dérivée de f_0 sur $]0, 1[$ est

$$f'_0(x) = \frac{a}{x^2} \left(-\frac{x}{1-x} - \ln(1-x) \right).$$

Posons $w(x) = -x/(1-x) - \ln(1-x)$ et prolongeons cette expression en 0 par $w(0) = 0$. Elle est de classe C^∞ sur un ouvert contenant $[0, 1[$, à l'exclusion de 1, et

$$w'(x) = -\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Sur $]0, 1[$, $w' < 0$, donc $w(x) < w(0) = 0$. On conclut

$$g_0(x) = a \left(-\frac{x}{1-x} - \ln(1-x) \right) < 0 \quad (0 < x < 1).$$

b) Puisque $x^2 > 0$, le signe de f'_0 est celui de g_0 , donc f_0 est strictement décroissante. La dérivabilité de $\ln(1-x)$ en 0 donne $\ln(1-x)/x \rightarrow -1$. Ainsi,

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = a(-1) + a = 0.$$

Lorsque $x \rightarrow 1^-$, $a/x \rightarrow a > 0$ et $\ln(1-x) \rightarrow -\infty$, donc $f_0(x) \rightarrow -\infty$. Le prolongement en 0 est continu, et le tableau de variation s'écrit

x	0	$\rightarrow$	1^-
$f'_0(x)$		—	
$f_0(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

- c) Question adaptée au programme actuel : les indications conduisent à Taylor-Young appliqué à chaque fonction étudiée et à une vérification directe de la dérivée au bord.

La fonction $\ell(x) = \ln(1-x)$ est de classe C^2 près de 0, avec $\ell(0) = 0$, $\ell'(0) = -1$, $\ell''(0) = -1$. Taylor-Young donne

$$\ell(x) = -x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \rightarrow 0.$$

Pour $x > 0$, le taux d'accroissement du prolongement de f_0 en 0 vaut

$$\frac{f_0(x) - f_0(0)}{x} = a \frac{\ell(x) + x}{x^2} = -\frac{a}{2} + a\varepsilon(x).$$

La dérivée à droite existe donc et $f'_0(0) = -a/2$.

Pour vérifier la continuité de la dérivée, on utilise directement w , de classe C^2 près de 0. On a $w(0) = w'(0) = 0$ et $w''(0) = -1$, d'après $w'(x) = -x/(1-x)^2$. Taylor-Young donne

$$w(x) = -\frac{x^2}{2} + x^2\eta(x), \quad \eta(x) \rightarrow 0.$$

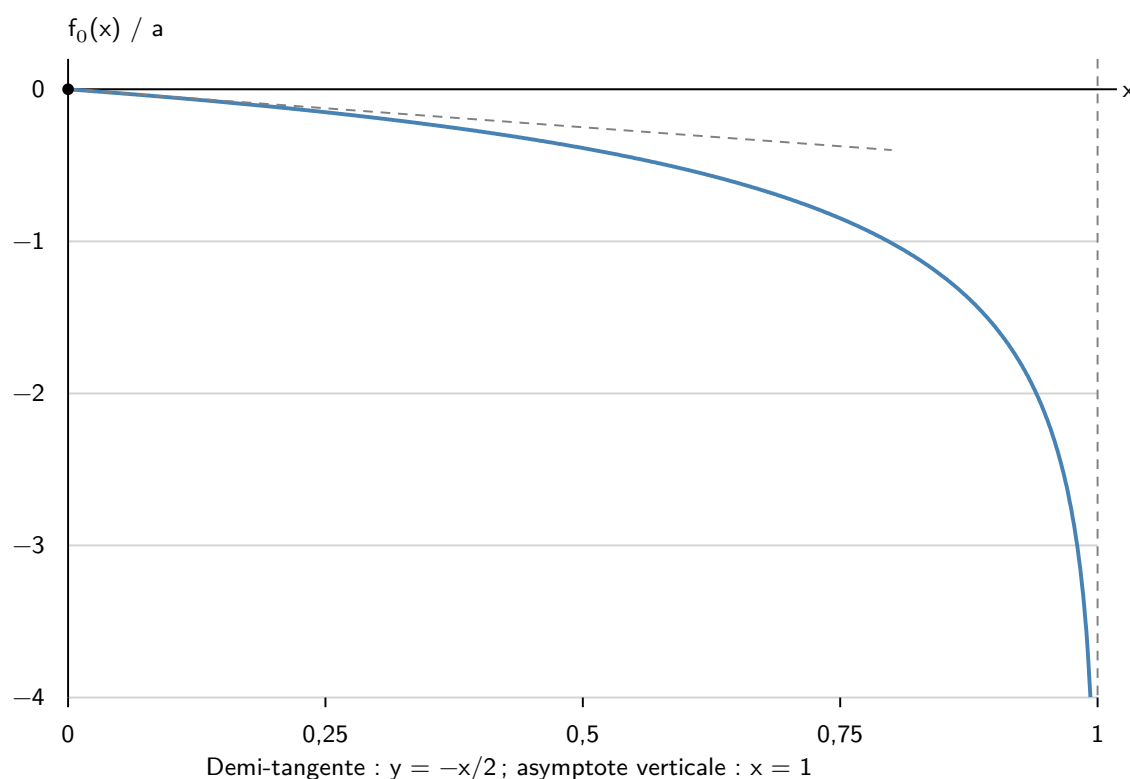
Par la formule de a), $f'_0(x) = aw(x)/x^2 \rightarrow -a/2 = f'_0(0)$. La dérivée est déjà continue sur $]0, 1[$ par son expression. Le prolongement est donc de classe C^1 sur $[0, 1[$, au sens des dérivées à droite en 0. Aucun théorème de prolongement de la dérivée n'est nécessaire.

La courbe part de $(0, 0)$ avec la demi-tangente $y = -ax/2$, descend strictement, et admet l'asymptote verticale $x = 1$. Pour préciser sa concavité, on peut écrire, pour $0 < x < 1$,

$$f''_0(x) = \frac{a}{x^3} \left(-\frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x}{1-x} + 2\ln(1-x) \right).$$

Le terme entre parenthèses, noté $v(x)$, vaut 0 en 0 et vérifie $v'(x) = -2x^2/(1-x)^3 < 0$. Il est négatif; la courbe est donc concave sur $]0, 1[$. Le tracé suivant utilise l'ordonnée

$f_0(x)/a$ pour représenter tous les paramètres $a > 0$; les ordonnées de la courbe de f_0 s'obtiennent en multipliant par a .



d) Question adaptée au programme actuel : la notation $p_0(0)$ imprimée dans cette ligne du PDF est rectifiée en $p_n(0)$; l'évaluation de f_0 n'est utilisée que pour $n \geq 2$.

Pour $n \geq 2$, $p_n(0) = (1 - 1/n)^{an} > 0$, donc

$$\ln p_n(0) = an \ln(1 - 1/n) = f_0(1/n) - a,$$

et ainsi

$$p_n(0) = \exp(f_0(1/n) - a).$$

La suite $(1/n)$ décroît strictement, tandis que f_0 est strictement décroissante; la suite $(f_0(1/n))_{n \geq 2}$ croît strictement. L'exponentielle étant strictement croissante, $(p_n(0))_{n \geq 2}$ croît strictement. Comme $f_0(1/n) \rightarrow 0$, sa limite est e^{-a} . Enfin $p_1(0) = 0 < p_2(0)$: la suite entière $(p_n(0))_{n \geq 1}$ est strictement croissante et converge vers e^{-a} .

2. Loi limite.

a) Méthode 1 — Calculer chaque probabilité.

Fixons $k \in \mathbb{N}$. Pour n assez grand, $n \geq 2$ et $na \geq k$. On réécrit la formule binomiale sous la forme

$$p_n(k) = \frac{a^k}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{an} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{an} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-k},$$

avec un produit vide égal à 1 si $k = 0$. Le produit possède un nombre fixé k de facteurs, chacun tendant vers 1 ; il tend donc vers 1. Le deuxième facteur variable tend vers e^{-a} par 1.d, et le dernier tend vers 1 par continuité d'une puissance entière sur les réels strictement positifs. Par les règles sur les produits de limites,

$$p(k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(k) = e^{-a} \frac{a^k}{k!}.$$

Ces probabilités sont celles d'une loi de Poisson de paramètre a ; leur somme vaut $e^{-a}e^a = 1$, par la série exponentielle. Les variables sont à valeurs entières. La caractérisation de la convergence en loi par les probabilités ponctuelles s'applique et donne une loi limite $\mathcal{P}(a)$.

Méthode 2 — Reconnaître l'approximation binomiale-Poisson.

Posons $N_n = an$. Alors $N_n \rightarrow +\infty$ et X_i suit la loi $\mathcal{B}(N_n, a/N_n)$, puisque $a/N_n = 1/n$. Le résultat du programme $\mathcal{B}(N, a/N) \rightarrow \mathcal{P}(a)$ lorsque $N \rightarrow +\infty$ s'applique aussi le long des entiers $N_n = an$, ce qui redonne la même loi limite. Ce résultat était prévisible : le nombre d'essais tend vers l'infini, leur probabilité de succès tend vers 0, et le nombre moyen de succès reste égal à a .

Le calcul direct donne l'expression précise de chaque limite ; l'approximation classique permet de reconnaître rapidement le régime probabiliste. Il ne faut pas déduire la

convergence des moments de la seule convergence en loi : ici, les moments de la loi limite sont connus séparément.

b) Si Z suit la loi limite $\mathcal{P}(a)$, son espérance et sa variance existent et valent

$$E(Z) = a, \quad V(Z) = a.$$

Toutes ses probabilités $p(k) = e^{-a}a^k/k!$ sont strictement positives, et

$$\frac{p(k+1)}{p(k)} = \frac{a}{k+1}.$$

Puisque a est un entier strictement positif, ce rapport est supérieur à 1 pour $k < a - 1$, égal à 1 pour $k = a - 1$, et inférieur à 1 pour $k \geq a$. Les deux modes sont donc $a - 1$ et a . Pour $a = 1$, il s'agit de 0 et 1, qui ont bien la même masse. La loi binomiale de I.1 avait un unique mode a ; sa limite peut avoir deux modes.

3. Position et monotonie éventuelles de $(p_n(k))$.

On conserve $k \geq 1$, distinct de b, c . Question adaptée au programme actuel : les domaines rendent les logarithmes définis et les indications permettent d'appliquer Taylor-Young directement aux fonctions régulières étudiées.

a) Pour n assez grand, $1/n$ est dans le domaine indiqué, $na \geq k$ et $p_n(k) > 0$. Dans la réécriture de 2.a, on divise par $p(k) = e^{-a}a^k/k! > 0$, puis on prend le logarithme de facteurs tous strictement positifs. Il vient

$$\ln \left(\frac{p_n(k)}{p(k)} \right) = a + (an - k) \ln(1 - 1/n) + \sum_{j=0}^{k-1} \ln \left(1 - \frac{j}{an} \right) = f_k(1/n).$$

Il s'agit d'une égalité exacte. En particulier, la position de $p_n(k)$ par rapport à $p(k)$ est déterminée par le signe de $f_k(1/n)$.

b) Écrivons la fonction à développer sans division par x :

$$h_k(x) = xf_k(x) = (a - kx) \ln(1 - x) + ax + x \sum_{j=0}^{k-1} \ln \left(1 - \frac{jx}{a} \right).$$

Pour un voisinage ouvert assez petit de 0, tous les arguments des logarithmes sont strictement positifs. Cette expression y définit une fonction de classe C^∞ , avec $h_k(0) = 0$. Posons $L(x) = \ln(1 - x)$ et

$$R(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \ln(1 - jx/a).$$

On a

$$L(0) = R(0) = 0, \quad L'(0) = -1, \quad L''(0) = -1, \quad R'(0) = -\frac{1}{a} \sum_{j=0}^{k-1} j = -\frac{k(k-1)}{2a}.$$

On dérive la fonction exacte, avant tout développement limité :

$$h'_k(x) = -kL(x) + (a - kx)L'(x) + a + R(x) + xR'(x),$$

$$h''_k(x) = -2kL'(x) + (a - kx)L''(x) + 2R'(x) + xR''(x).$$

Ainsi $h'_k(0) = 0$ et

$$h''_k(0) = 2k - a - \frac{k(k-1)}{a} = 2A, \quad A = k - \frac{a}{2} - \frac{k(k-1)}{2a}.$$

Taylor-Young appliqué à h_k lui-même donne

$$xf_k(x) = Ax^2 + o(x^2).$$

Pour $x > 0$, la division par x donne $f_k(x) = Ax + o(x)$; cette conclusion est obtenue directement à partir de la définition du reste, sans règle de composition de

développements limités. On factorise le coefficient :

$$A = -\frac{k^2 - (2a+1)k + a^2}{2a} = -\frac{(k-b)(k-c)}{2a}.$$

Le discriminant du trinôme en k est $4a+1 > 0$, et ses deux racines sont précisément les b, c de l'énoncé. Comme $a > 0$, $A < 0$ si $k < b$ ou $k > c$, tandis que $A > 0$ si $b < k < c$. L'exclusion de $k = b, c$ assure $A \neq 0$.

L'égalité $f_k(x)/x \rightarrow A$ implique que, pour $x > 0$ assez petit, $f_k(x)$ a le signe de A . En évaluant en $1/n$, on conclut, pour n assez grand :

- si $k < b$ ou $k > c$, alors $f_k(1/n) < 0$ et $p_n(k) < p(k)$;
- si $b < k < c$, alors $f_k(1/n) > 0$ et $p_n(k) > p(k)$.

Le passage de l'égalité logarithmique à ces comparaisons utilise uniquement la croissance stricte du logarithme et $\ln 1 = 0$.

c) Sur le domaine positif, $f_k = h_k/x$. En dérivant ce quotient,

$$g_k(x) = x^2 f'_k(x) = x h'_k(x) - h_k(x).$$

Le membre de droite définit un prolongement de classe C^∞ près de 0. On dérive cette expression exacte :

$$g_k(0) = 0, \quad g'_k(x) = x h''_k(x), \quad g''_k(x) = h''_k(x) + x h'''_k(x).$$

Comme h'''_k est continue près de 0, il vient $g'_k(0) = 0$ et $g''_k(0) = h''_k(0) = 2A$. Taylor-Young appliqué directement à g_k donne

$$g_k(x) = Ax^2 + o(x^2).$$

Pour $x > 0$ assez petit, $g_k(x)$ a donc le signe de A . Puisque $f'_k(x) = g_k(x)/x^2$ et $x^2 > 0$, f'_k a ce même signe. Il en résulte :

- si $b < k < c$, f_k est strictement croissante près de 0, donc $(f_k(1/n))$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang;
- si $k < b$ ou $k > c$, f_k est strictement décroissante près de 0, donc $(f_k(1/n))$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.

La question a) donne $p_n(k) = p(k) \exp(f_k(1/n))$, avec $p(k) > 0$. La croissance stricte de l'exponentielle préserve le sens de variation. Ainsi, à partir d'un certain rang, $(p_n(k))$ décroît strictement vers $p(k)$ si $b < k < c$, et croît strictement vers $p(k)$ si $k < b$ ou $k > c$. Cette conclusion est cohérente avec les positions relatives établies en b). Elle ne prétend pas à une monotonie pour les petits indices où ces arguments locaux ne s'appliquent pas.

Relevé des adaptations

- Préambule, I.1 à I.4 : indépendance des choix des consommateurs explicitée, nécessaire pour déterminer les lois binomiales et les probabilités d'éviter plusieurs fournisseurs.
- I.1.b et I.2 : traitement séparé de $n = 1$ et restriction $n \geq 2$ pour les rapports et les paires de fournisseurs distincts ; le rapport en I.1.b est aussi étudié en $k = 0$ pour comparer les deux premières masses.
- I.4.b et I.4.d : rappel guidé de l'identité finie du crible dans ce modèle ; les intersections vides sont précisées pour $k = 0$. Aucun chapitre général de dénombrement n'est supposé connu.
- II.1.c : indications de Taylor-Young appliqué directement à des fonctions de classe C^2 et vérification explicite de la dérivée à droite en 0, sans théorème de prolongement de la dérivée.
- II.1.d : rectification de $p_0(0)$ en $p_n(0)$; précision $n \geq 2$ pour l'évaluation $f_0(1/n)$, et maintien du cas $n = 1$ par sa loi certaine.

- II.3 : domaine des logarithmes et indices assez grands explicités ; indications pour établir les deux développements d'ordre 2 par Taylor-Young directement sur les fonctions étudiées. La notation $p_k(n)$ de la dernière ligne du PDF est rectifiée en $p_n(k)$; l'exclusion de $k = b, c$ est conservée.