



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2 — Option économique

1988

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

Une urne contient n boules numérotées $1, 2, 3, \dots, n$. On y effectue une suite de tirages avec remise : à chaque tirage, la boule extraite est remise dans l'urne avant le tirage suivant. Les tirages sont indépendants et chaque boule a la probabilité $1/n$ d'être obtenue à chaque tirage.

Soit X_n la variable aléatoire indiquant le numéro du tirage où, pour la première fois, chacune des n boules a été obtenue au moins une fois. On étudie X_n et le comportement asymptotique de son espérance.

Dans les expressions polynomiales ou les formules finies ci-dessous, une puissance d'exposant nul vaut 1, y compris lorsque sa base est nulle.

Partie I

On désigne par p un entier naturel non nul. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on considère l'événement B_i : « la boule numérotée i n'est pas apparue au cours des p premiers tirages ».

1. Étude de la variable aléatoire X_2 .

Dans cette question, $n = 2$: l'urne contient deux boules numérotées 1 et 2.

a) Soit $x \in [0, 1[$. Calculer les sommes

$$S_p(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^p, \quad \Sigma_p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + px^{p-1}.$$

Déterminer leurs limites respectives $S(x)$ et $\Sigma(x)$ lorsque p tend vers l'infini.

b) Calculer $P(X_2 = p)$. En déduire l'espérance de X_2 .

2. Étude de la variable aléatoire X_3 .

Dans cette question, $n = 3$.

a) On rappelle la formule, pour deux événements A, B ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

À l'aide de celle-ci, établir une formule analogue donnant la probabilité de $A \cup B \cup C$, pour trois événements A, B, C .

b) Soient i, j, k trois entiers distincts appartenant à $\{1, 2, 3\}$. Calculer $P(B_i)$, $P(B_i \cap B_j)$, $P(B_i \cap B_j \cap B_k)$ et en déduire $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$.

c) Exprimer $P(X_3 > p)$ à l'aide de $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ et en déduire $P(X_3 = p)$.

d) Calculer l'espérance de X_3 , sous forme d'une fraction irréductible.

3. Étude de la variable aléatoire X_n .

On revient au cas général.

a) Calculer, en fonction de n, p , les probabilités $P(B_i)$ et $P(B_i \cap B_j)$ pour $i \neq j$. Plus généralement, si $i_1, \dots, i_k$ sont k entiers distincts appartenant à $\{1, \dots, n\}$, calculer $P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k})$.

b) En déduire, à l'aide de la formule de Poincaré, ou du crible, la probabilité de $B_1 \cup \dots \cup B_n$.

Pour les événements considérés, cette formule s'écrit

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}).$$

On pourra la justifier en remarquant que, si exactement $m \geq 1$ des événements sont

réalisés, leur contribution au membre de droite vaut

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \binom{m}{k} = 1,$$

par le binôme de Newton ; si aucun n'est réalisé, elle vaut 0.

c) Que vaut $P(X_n > p)$? En déduire que

$$P(X_n = p) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{p-1}.$$

d) En déduire l'identité suivante, pour tout entier q tel que $0 \leq q < n$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^q = 0.$$

4. Calcul de l'espérance $E(X_n)$.

On pose désormais $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

a) Établir, pour tout $x \in [0, 1]$, la formule

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} x^{k-1},$$

et en déduire que

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = H_n.$$

- b)** Dédurre des résultats précédents que $E(X_n) = nH_n$.
- c)** Écrire un algorithme en Python de calcul de $E(X_n)$. En déduire des valeurs décimales approchées pour $n = 10, n = 20, n = 50, n = 100$, en donnant les deux premières décimales fournies par le calcul.

Partie II

Dans cette partie, H_n est le nombre défini en I.4. Pour les calculs numériques, `np.log(x)`, après `import numpy as np`, calcule le logarithme népérien de `x`, pour `x` strictement positif.

1. Étude de $H_n - \ln n$.

- a)** En utilisant $\ln(x+1) - \ln x = \int_x^{x+1} \frac{dt}{t}$ et en encadrant l'intégrande, prouver que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

- b)** On considère les suites définies, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = H_n - \ln n, \quad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

Étudier leur sens de variation et montrer qu'elles convergent vers une limite commune, notée γ .

- c)** Montrer que $u_n - \frac{1}{n} \leq \gamma \leq u_n$. En déduire comment il suffit de choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de γ à 0,0001 près.

2. Étude d'une fonction auxiliaire.

Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \frac{x}{2(1+x)} + \frac{x}{2} - \ln(1+x).$$

a) Calculer F' et montrer que $0 \leq F(x) \leq x^3/6$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)/x^3$. On pourra, pour $0 \leq t \leq x$, encadrer $F'(t)$ entre $t^2/(2(1+x)^2)$ et $t^2/2$, puis intégrer de 0 à x .

En déduire le plus petit réel positif k tel que, pour tout $x \geq 0$, $F(x) \leq kx^3$.

3. Étude asymptotique de H_n .

On considère la suite définie, pour $n \geq 1$, par $w_n = H_n - \ln n - \frac{1}{2n}$.

a) Soit p un entier strictement supérieur à n . Calculer la somme des termes $w_{k+1} - w_k$ pour $n+1 \leq k \leq p$. En déduire l'existence et la valeur de

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k).$$

b) Exprimer $w_{k+1} - w_k$ en fonction de $F(1/k)$. Par comparaison de la série avec une intégrale, en déduire que

$$0 \leq r_n \leq \frac{1}{12n^2}.$$

c) Comment suffit-il de choisir n pour avoir

$$0 \leq \gamma - \left(H_n - \ln n - \frac{1}{2n} \right) \leq 0,0001?$$

Calculer la valeur approchée de γ ainsi obtenue, en donnant les décimales affichées par le calcul.

4. Conclusion.

Démontrer qu'il existe des réels a, b, c , que l'on explicitera, et une suite (ε_n) de limite nulle tels que

$$E(X_n) = an \ln n + bn + c + \varepsilon_n.$$

Retrouver ainsi les résultats numériques demandés en I.4, en donnant à chaque fois un majorant de l'erreur commise.