



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**ESSEC**

Mathématiques 2 — Option économique

**1988**

*Mathématiques appliquées*

---

**Mathématiques appliquées — Prépa ECG**

Annales de concours · Corrigé

## Partie I

Les tirages sont indépendants et uniformes, comme précisé dans le sujet adapté. Pour  $n \geq 2$ , la probabilité qu'une boule donnée soit absente des  $p$  premiers tirages vaut  $(1 - 1/n)^p$ . La probabilité qu'au moins une boule manque est donc majorée par  $n(1 - 1/n)^p$ , qui tend vers 0. La probabilité de ne jamais terminer la collection est nulle, par continuité décroissante des probabilités. Ainsi,  $X_n$  est fini avec probabilité 1. Pour  $n = 1$ , on a directement  $X_1 = 1$ .

### 1. Étude de $X_2$ .

**a)** Méthode 1 — Somme géométrique finie et dérivation d'un polynôme.

Pour  $0 \leq x < 1$ , la multiplication de  $S_p$  par  $1 - x$  donne  $1 - x^{p+1}$ . Comme  $1 - x > 0$ ,

$$S_p(x) = \frac{1 - x^{p+1}}{1 - x}.$$

Le polynôme  $S_p$  a pour dérivée  $\Sigma_p$ . On dérive l'identité finie, ce qui ne demande aucune règle de dérivation de série :

$$\Sigma_p(x) = \frac{1 - (p+1)x^p + px^{p+1}}{(1-x)^2}.$$

Pour  $0 < x < 1$ , les croissances comparées donnent  $x^p \rightarrow 0$  et  $px^p \rightarrow 0$ . On obtient

$$S(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \Sigma(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

À  $x = 0$ , les deux sommes valent 1 pour tout  $p \geq 1$ , ce qui confirme les mêmes formules.

### Méthode 2 — Soustraction de deux sommes finies.

En écrivant  $x\Sigma_p(x) = x + 2x^2 + \dots + px^p$ , on soustrait terme à terme :

$$(1-x)\Sigma_p(x) = 1 + x + \dots + x^{p-1} - px^p = \frac{1-x^p}{1-x} - px^p.$$

Une nouvelle division par  $1 - x$  donne exactement l'expression précédente de  $\Sigma_p$ . Les mêmes limites établissent sa somme. La première méthode réutilise la dérivation ; la seconde évite toute dérivation et s'applique directement à des sommes pondérées.

**b) Méthode 1 —** Calculer la loi puis son premier moment.

Il faut au moins deux tirages pour obtenir les deux boules :  $P(X_2 = 1) = 0$ . Pour  $p \geq 2$ , les  $p - 1$  premiers tirages doivent tous donner la même boule et le dernier doit donner l'autre. Les deux possibilités sont incompatibles et chacune a la probabilité  $(1/2)^p$ . Ainsi,

$$P(X_2 = p) = 2^{1-p} \quad (p \geq 2).$$

La série des moments converge, par I.1.a avec  $x = 1/2$ . Les termes sont positifs, donc cette convergence justifie l'espérance :

$$E(X_2) = \sum_{p=2}^{+\infty} p \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} = \Sigma(1/2) - 1 = 4 - 1 = 3.$$

**Méthode 2 — Reconnaître un temps d'attente géométrique.**

Après le premier tirage, notons  $G$  le nombre de tirages supplémentaires jusqu'à l'autre boule. Les tirages suivants sont indépendants et leur probabilité de donner l'autre boule est toujours  $1/2$ , quel que soit le numéro de la première. Pour tout  $m \geq 1$ ,  $P(G = m) = (1/2)^{m-1}(1/2)$  :  $G$  suit une loi géométrique de paramètre  $1/2$ . Son espérance vaut 2. Ainsi,  $X_2 = 1 + G$  et  $E(X_2) = 1 + 2 = 3$ . Cette seconde lecture donne directement le temps d'attente ; la première permet également de disposer de sa loi explicite.

**2. Étude de  $X_3$ .**

**a)** On applique deux fois la formule pour deux événements :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C).$$

Or  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ , donc

$$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C).$$

Après remplacement,

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Chaque terme provient ainsi d'une union de deux événements, sans hypothèse d'indépendance.

- b)** Pour éviter une boule fixée, chaque tirage doit donner l'une des deux autres ; l'indépendance donne  $P(B_i) = (2/3)^p$ . Pour éviter deux boules distinctes, les  $p$  tirages doivent tous donner la troisième, d'où  $P(B_i \cap B_j) = (1/3)^p$ . Éviter les trois boules est impossible dès qu'un tirage a lieu :  $P(B_i \cap B_j \cap B_k) = 0$  puisque  $p \geq 1$ .

Il existe trois événements simples et trois intersections de deux événements. La formule de a) donne

$$P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^p - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^p.$$

- c)** La collection est incomplète après  $p$  tirages si et seulement si au moins une boule est absente. Ainsi,

$$[X_3 > p] = B_1 \cup B_2 \cup B_3,$$

$$P(X_3 > p) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^p - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^p \quad (p \geq 1).$$

Pour  $p \geq 2$ , on soustrait les probabilités aux rangs  $p - 1$  et  $p$  :

$$P(X_3 = p) = P(X_3 > p - 1) - P(X_3 > p) = \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1}.$$

Cette formule donne 0 pour  $p = 2$ . Pour  $p = 1$ , il faut traiter le cas directement :  $P(X_3 = 1) = 0$ . La formule de queue de b), valable pour  $p \geq 1$ , ne doit pas être utilisée à  $p = 0$  ; les trois événements d'absence seraient alors tous certains. Le support de  $X_3$  est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 3.

**d) Méthode 1 — Utiliser la loi calculée.**

Les deux séries de terme général  $p(2/3)^{p-1}$  et  $p(1/3)^{p-1}$  convergent par I.1.a. Leur différence donne une série absolument convergente, ce qui justifie le calcul du moment :

$$E(X_3) = \sum_{p=2}^{+\infty} p \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} \right] = (9 - 1) - 2 \left(\frac{9}{4} - 1\right) = \frac{11}{2}.$$

**Méthode 2 — Additionner les temps de découverte.**

---

Le premier tirage apporte une première boule et prend un temps égal à 1. Lorsque deux boules restent inconnues, chaque nouveau tirage en apporte une avec la probabilité  $2/3$ . Après tout historique fixé conduisant à cette situation, l'attente de la prochaine découverte a la loi géométrique de paramètre  $2/3$ , car les tirages suivants sont indépendants ; son espérance est  $3/2$ . Lorsque seule une boule manque, le même raisonnement donne une attente géométrique de paramètre  $1/3$ , d'espérance 3. Ces lois ne dépendent pas de l'historique, donc restent les lois des attentes sans conditionnement, par probabilités totales. La linéarité de l'espérance donne encore  $E(X_3) = 1 + 3/2 + 3 = 11/2$ , sans nécessiter l'indépendance entre ces attentes. Cette méthode décompose le mécanisme de collecte ; la première exploite directement la loi et les séries usuelles.

**3. Étude de  $X_n$ .**

**a)** À chaque tirage, éviter une boule a la probabilité  $(n-1)/n$ . Éviter deux boules distinctes a la probabilité  $(n-2)/n$ , si  $n \geq 2$ . Plus généralement, éviter les  $k$  boules

distinctes  $i_1, \dots, i_k$  a la probabilité  $(n - k)/n$ . L'indépendance des  $p$  tirages donne

$$P(B_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p, \quad P(B_i \cap B_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^p \quad (i \neq j),$$

$$P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^p \quad (1 \leq k \leq n).$$

Pour  $k = n$ , cette probabilité est 0 puisque  $p \geq 1$ . Pour  $n = 1$ , seule la première formule est à considérer, et elle donne bien 0.

**b)** Question adaptée au programme actuel : le crible est rappelé et accompagné d'une justification finie dans le sujet.

Pour une issue fixée, notons  $m$  le nombre d'événements  $B_i$  réalisés. Si  $m = 0$ , toutes les intersections qui interviennent sont fausses. Si  $m \geq 1$ , exactement  $\binom{m}{k}$  intersections de  $k$  événements sont réalisées. Le binôme de Newton donne

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \binom{m}{k} = 1 - (1 - 1)^m = 1.$$

La somme alternée des indicatrices des intersections est donc l'indicatrice de la réunion. En prenant l'espérance de cette égalité de sommes finies, on obtient la formule rappelée. Pour un  $k$  fixé, les ensembles de  $k$  indices sont au nombre de  $\binom{n}{k}$  et toutes les intersections ont la même probabilité, calculée en a). Ainsi,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^p.$$

**c)** L'identité d'événements  $[X_n > p] = \bigcup_i B_i$  donne la même expression pour  $P(X_n > p)$ . Pour  $p \geq 2$ , la différence de deux queues successives vaut

$$P(X_n = p) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left[ \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{p-1} - \left(1 - \frac{k}{n}\right)^p \right],$$

d'où

$$P(X_n = p) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{p-1}.$$

Pour inclure  $p = 1$ , on remarque que la formule du crible au temps 0, avec des puissances d'exposant nul égales à 1, donne bien

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = 1 = P(X_n > 0).$$

La même soustraction est alors valable. Elle donne  $P(X_1 = 1) = 1$  et, pour  $n \geq 2$ ,  $P(X_n = 1) = 0$ . Le terme  $k = 0$  de la formule demandée est nul ; on peut donc l'ajouter sans changer la somme. Les probabilités sont nulles pour  $p < n$ , car  $p$  tirages ne peuvent fournir  $n$  boules distinctes.

**d) Méthode 1** — Utiliser les probabilités impossibles, comme demandé.

Notons

$$A_q = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^q.$$

Pour  $q = 0$ , la convention sur les puissances nulles et le binôme donnent  $A_0 = (1 - 1)^n = 0$ .

Supposons  $1 \leq q < n$  et que  $A_0, \dots, A_{q-1}$  soient nuls. La probabilité  $P(X_n = q)$  est nulle. La formule de c), multipliée par  $n^q$ , donne

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} k(n-k)^{q-1} = 0.$$

Le binôme développe le facteur polynomial :

$$k(n-k)^{q-1} = \sum_{j=0}^{q-1} \binom{q-1}{j} n^{q-1-j} (-1)^j k^{j+1}.$$

Dans la somme sur  $k$ , les puissances  $k^{j+1}$  avec  $j+1 < q$  donnent 0 par l'hypothèse de récurrence. Il reste le coefficient non nul  $(-1)^{q-1}$  de  $k^q$ , donc  $A_q = 0$ . Cette récurrence établit l'identité pour tous les  $0 \leq q < n$ , y compris  $n = 1$ , où seul  $q = 0$  intervient.

## Méthode 2 — Dériver une identité polynomiale finie.

On part de

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k.$$

Appliquons  $q$  fois l'opération qui transforme un polynôme  $P$  en  $xP'(x)$ . À droite, chaque monôme  $x^k$  est multiplié par  $k$  à chaque opération : le résultat est

$$\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} k^q x^k.$$

À gauche, une récurrence montre que, pour  $q < n$ , le polynôme obtenu est divisible par  $(1-x)^{n-q}$ . En effet, si le résultat au rang  $q$  est  $(1-x)^{n-q}Q(x)$ , sa dérivée multipliée par  $x$  vaut

$$(1-x)^{n-q-1} [-(n-q)xQ(x) + x(1-x)Q'(x)].$$

Ce facteur reste présent tant que  $q < n$ . En évaluant à  $x = 1$ , on obtient donc  $A_q = 0$ . La première preuve rattache l'identité au problème probabiliste ; la seconde montre un mécanisme algébrique d'annulation, avec seulement des polynômes et une récurrence.

#### 4. Calcul de $E(X_n)$ .

a) Pour  $x > 0$ , la somme géométrique donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k = \frac{1 - (1-x)^n}{x}.$$

Le binôme développe le numérateur en

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} x^k.$$

On divise par  $x$  et on obtient la formule demandée. À  $x = 0$ , les deux membres sont des polynômes continus; chacun vaut  $n$ , donc l'égalité reste vraie.

On intègre cette identité de sommes finies sur  $[0, 1]$ . Toutes les fonctions sont continues; la linéarité de l'intégrale s'applique sans échange de somme infinie :

$$\int_0^1 (1-x)^k dx = \frac{1}{k+1}, \quad \int_0^1 x^{k-1} dx = \frac{1}{k}.$$

Ainsi,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

b) Méthode 1 — Calculer le moment à partir de la loi.

Pour  $1 \leq k \leq n$ , posons  $a_k = 1 - k/n \in [0, 1[$ . La série

$$\sum_{p \geq 1} p a_k^{p-1}$$

converge et vaut  $(1 - a_k)^{-2} = n^2/k^2$ , par I.1.a; pour  $a_k = 0$ , seul le premier terme est non nul. La formule de I.3.c est une somme finie de ces termes, donc

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p \left| \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{k}{n} a_k^{p-1} \right| \leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} \sum_{p=1}^{+\infty} p a_k^{p-1} < +\infty.$$

Cela justifie l'existence de l'espérance avant son calcul. La linéarité pour une somme finie de séries convergentes donne

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{k}{n} \frac{n^2}{k^2} = n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = nH_n.$$

## Méthode 2 — Décomposer le temps en découvertes successives.

Après la découverte de  $j$  boules distinctes, avec  $0 \leq j < n$ , la probabilité qu'un tirage fournisse une boule nouvelle est  $(n - j)/n$ . Pour tout historique fixé conduisant à ces  $j$  découvertes, les tirages à venir sont indépendants et uniformes. Le nombre  $W_j$  de tirages jusqu'à la découverte suivante a donc la loi géométrique de paramètre  $(n - j)/n$ ; pour  $j = 0$ , il vaut toujours 1, et la même espérance est valide. Ses moments sont finis et

$$E(W_j) = \frac{n}{n - j}.$$

La loi conditionnelle de cette attente ne dépend ni des numéros déjà obtenus ni du nombre de tirages passés. La formule des probabilités totales donne donc la même loi pour  $W_j$  sans conditionnement. Comme  $X_n = W_0 + \dots + W_{n-1}$ , la linéarité de l'espérance, qui ne nécessite pas l'indépendance de ces variables, donne

$$E(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n}{n - j} = nH_n.$$

La première méthode réutilise les sommes alternées de l'énoncé; la seconde explique

pourquoi les dernières boules, plus difficiles à obtenir, contribuent davantage au temps moyen.

- c) Code adapté en Python. On additionne les  $n$  termes de la somme harmonique puis on multiplie par  $n$ .

### Python

```
def esperance(n):
    h = 0.0
    for k in range(1, n + 1):
        h = h + 1 / k
    return n * h

for n in [10, 20, 50, 100]:
    print(n, esperance(n))
```

La variable  $h$  contient, après le passage d'indice  $k$ , la somme des inverses des entiers de 1 à  $k$ . La borne supérieure de range est exclue, d'où  $n + 1$ . Le code a été exécuté ; il donne les valeurs suivantes.

| $n$ | $E(X_n)$ approchée | Arrondi au centième |
|-----|--------------------|---------------------|
| 10  | 29,289682539683    | 29,29               |
| 20  | 71,954793142874    | 71,95               |
| 50  | 224,960266916471   | 224,96              |
| 100 | 518,737751763962   | 518,74              |

Si l'on conserve littéralement les deux premières décimales affichées, sans arrondir, les troncatures sont respectivement 29,28, 71,95, 224,96 et 518,73. Le tableau distingue donc l'arrondi de la simple suppression des décimales suivantes.

## Partie II

### 1. Étude de $H_n - \ln n$ .

- a) Question adaptée au programme actuel : on utilise une intégrale sur un segment à la place de l'égalité des accroissements finis.

Pour  $x > 0$ , la fonction  $t \mapsto 1/t$  est continue et strictement décroissante sur  $[x, x+1]$ . Sur cet intervalle,

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}.$$

Chacune des différences entre la fonction et les deux constantes est continue, positive et non identiquement nulle. Son intégrale est donc strictement positive. En intégrant sur un segment de longueur 1, on obtient

$$\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} = \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

- b) Calculons les différences successives :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n < 0,$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) > 0,$$

où les deux signes résultent de a), appliqué à  $x = n$  puis à  $x = n+1$ . De plus,

$$u_n - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0,$$

et cette différence tend vers 0 par continuité du logarithme en 1. Les suites sont donc adjacentes :  $u_n$  décroît,  $v_n$  croît et  $v_n \leq u_n$ . Elles convergent vers une même limite finie  $\gamma$ , avec  $v_n \leq \gamma \leq u_n$  pour tout  $n$ .

- c) La majoration de a) donne  $\ln(1 + 1/n) < 1/n$ . Par conséquent,

$$u_n - \frac{1}{n} < v_n \leq \gamma \leq u_n.$$

En particulier,  $0 \leq u_n - \gamma \leq 1/n$ . Il suffit donc de prendre  $n \geq 10000$  pour garantir une erreur au plus égale à  $10^{-4}$ . Ce choix est suffisant ; il n'est pas affirmé minimal.

## 2. Étude de la fonction auxiliaire.

a) La fonction  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$ , avec dérivée à droite en 0. Sa dérivée est

$$F'(x) = \frac{1}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{2(1+x)^2}.$$

Pour  $t \geq 0$ , on a  $0 \leq F'(t) \leq t^2/2$ , puisque  $(1+t)^2 \geq 1$ . Comme  $F(0) = 0$ , le lien entre primitive et intégrale donne

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{2(1+t)^2} dt,$$

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^x \frac{t^2}{2} dt = \frac{x^3}{6}.$$

Cette démonstration vaut aussi pour  $x = 0$ , où les trois quantités sont nulles.

b) Question adaptée au programme actuel : la limite du quotient remplace le développement limité d'ordre 3. Aucune formule de développement limité d'ordre supérieur à 2 n'est nécessaire.

Pour  $0 \leq t \leq x$ , on a  $1 \leq 1+t \leq 1+x$ , donc

$$\frac{t^2}{2(1+x)^2} \leq F'(t) \leq \frac{t^2}{2}.$$

On intègre entre 0 et  $x$ , ce qui donne

$$\frac{x^3}{6(1+x)^2} \leq F(x) \leq \frac{x^3}{6}.$$

Pour  $x > 0$ , la division par  $x^3$  est légitime. Les deux bornes tendent vers  $1/6$  lorsque  $x \rightarrow 0^+$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

La constante  $k = 1/6$  convient déjà par a). Réciproquement, si  $F(x) \leq kx^3$  pour tout  $x \geq 0$ , alors  $F(x)/x^3 \leq k$  pour  $x > 0$ . Le passage à la limite impose  $1/6 \leq k$ . Le plus petit réel admissible est donc  $k = 1/6$ .

### 3. Étude asymptotique de $H_n$ .

a) La somme finie est télescopique :

$$\sum_{k=n+1}^p (w_{k+1} - w_k) = w_{p+1} - w_{n+1}.$$

On sait  $H_m - \ln m \rightarrow \gamma$  et  $1/(2m) \rightarrow 0$ , donc  $w_m \rightarrow \gamma$ . En faisant tendre  $p$  vers l'infini dans la somme partielle, on prouve la convergence de la série et on obtient exactement

$$r_n = \gamma - w_{n+1}.$$

Le décalage d'indice est essentiel : le premier terme est  $w_{n+2} - w_{n+1}$ , et non  $w_{n+1} - w_n$ . Les indices du sujet sont conservés.

b) La différence de deux termes successifs vaut

$$\begin{aligned} w_{k+1} - w_k &= \frac{1}{k+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &= F(1/k). \end{aligned}$$

D'après II.2.a,  $0 \leq F(1/k) \leq 1/(6k^3)$ . Pour comparer la somme avec une intégrale, on utilise seulement l'inégalité particulière suivante : si  $t \in [k-1, k]$  et  $k \geq 2$ , alors  $1/t^3 \geq 1/k^3$ . Par conséquent,

$$\frac{1}{k^3} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3}.$$

Pour  $p > n \geq 1$ , la somme de ces inégalités donne

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^p F(1/k) \leq \frac{1}{6} \int_n^p \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12p^2} \leq \frac{1}{12n^2}.$$

Le passage à la limite dans cette inégalité de sommes partielles, dont la convergence a été établie en a), fournit

$$0 \leq r_n \leq \frac{1}{12n^2}.$$

Il ne s'agit pas d'un échange entre une somme infinie et une intégrale : on a comparé des sommes finies, puis pris leurs limites.

c) Pour  $n \geq 2$ , on applique a) et b) à l'indice  $n - 1$  :

$$\gamma - w_n = r_{n-1}, \quad 0 \leq \gamma - w_n \leq \frac{1}{12(n-1)^2}.$$

Il suffit donc que  $12(n-1)^2 \geq 10000$ , c'est-à-dire  $n \geq 1 + \sqrt{10000/12}$ . Pour un entier, le choix  $n \geq 30$  assure cette condition. On ne remplace pas  $r_{n-1}$  par  $r_n$ .

Le code suivant calcule la valeur proposée et la borne d'erreur ; il a été exécuté.

### Python

```
import numpy as np

def approche_gamma(n):
    h = 0.0
    for k in range(1, n + 1):
        h = h + 1 / k
    return h - np.log(n) - 1 / (2 * n)

n = 30
print(approche_gamma(n))
print(1 / (12 * (n - 1) ** 2))
```

Ce programme affiche 0,5771230825915684 et  $9,908838684106223 \times 10^{-5}$ . La valeur mathématique est  $w_{30} \simeq 0,577123082591569028$  et la borne d'erreur vaut exactement  $1/10092 \simeq 0,0000990883868410622$ . La quantité  $w_{30}$  approche  $\gamma$  par défaut, avec une erreur mathématique garantie au plus égale à  $1/10092 < 10^{-4}$ . Les derniers chiffres d'un affichage flottant ne représentent pas autant de décimales garanties de  $\gamma$ .

#### 4. Conclusion.

La définition de  $w_n$  donne  $H_n = \ln n + 1/(2n) + w_n$ . En multipliant par  $n$  et en utilisant I.4.b,

$$E(X_n) = n \ln n + \gamma n + \frac{1}{2} + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = n(w_n - \gamma).$$

Pour  $n \geq 2$ , la borne obtenue en II.3.c entraîne

$$-\frac{n}{12(n-1)^2} \leq \varepsilon_n \leq 0.$$

Les deux bornes tendent vers 0, donc  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . Les constantes demandées sont

$$a = 1, \quad b = \gamma, \quad c = \frac{1}{2}.$$

Notons  $A_n = n \ln n + \gamma n + 1/2$  et  $B_n = n/(12(n-1)^2)$ . On a l'encadrement rigoureux

$$A_n - B_n \leq E(X_n) \leq A_n \quad (n \geq 2).$$

Pour évaluer  $A_n$ , on peut améliorer l'approximation de  $\gamma$  par le même procédé qu'en II.3.c : à  $N = 100000$ , l'erreur sur  $w_N$  est au plus  $1/(12(N-1)^2) < 8,334 \times 10^{-12}$ . On obtient  $\gamma \simeq 0,5772156649$ . Les valeurs suivantes sont arrondies à six décimales ; les bornes  $B_n$  portent sur les expressions exactes  $A_n$ .

| $n$ | $A_n$ approché | $B_n$ approché | $E(X_n)$ de I.4.c |
|-----|----------------|----------------|-------------------|
| 10  | 29,298008      | 0,0102881      | 29,289683         |
| 20  | 71,958959      | 0,00461681     | 71,954793         |
| 50  | 224,961934     | 0,00173539     | 224,960267        |
| 100 | 518,738585     | 0,000850254    | 518,737752        |

On retrouve les valeurs de I.4.c à l'intérieur des intervalles annoncés, avec un majorant explicite de l'écart de chaque approximation. Pour utiliser les affichages à six décimales comme centres numériques, il suffit d'ajouter  $5 \times 10^{-7}$  à la borne, ainsi que l'erreur de l'évaluation de  $\gamma$  multipliée par  $n$  ; avec le choix de  $N$  précédent, cette dernière est inférieure à  $8,334 \times 10^{-10}$  pour  $n \leq 100$ .

Les trois termes asymptotiques seuls ne donnent pas nécessairement le même arrondi au centième que la valeur exacte : ils donnent 29,30 et 71,96 pour  $n = 10$  et  $n = 20$ , tandis que I.4.c donne 29,29 et 71,95. Les écarts restent conformes aux bornes démontrées. Pour  $n = 50$  et  $n = 100$ , les arrondis au centième coïncident. Il faut donc distinguer l'approximation asymptotique avec erreur contrôlée d'une certification de tous les chiffres affichés.

## Relevé des adaptations

---

- Préambule, I.2.b et I.3.a : indépendance et équiprobabilité des tirages explicitement posées, nécessaires aux probabilités d'absence. Convention sur les puissances nulles précisée pour inclure  $p = 1$  et  $q = 0$  dans les formules finies.
- I.3.b : formule du crible rappelée pour les événements étudiés et justification guidée par une identité finie de coefficients binomiaux, sans la supposer connue.
- I.4.c : Code adapté en Python. Le calcul de la somme harmonique et les valeurs demandées sont conservés ; arrondis et troncatures sont distingués dans le corrigé.
- II.1.a : indication d'intégration de  $1/t$  sur  $[x, x + 1]$  à la place de l'égalité des accroissements finis, non supposée exigible.
- II.2.b : remplacement du développement limité d'ordre 3 par une limite de quotient obtenue par encadrement de l'intégrale de  $F'$ . Le résultat nécessaire et la recherche de la constante optimale sont conservés.
- II.3.c : la précision numérique est exprimée par les décimales affichées par Python, avec distinction de la borne d'erreur mathématique. Les indices de II.3.a–b sont inchangés ; leur décalage est pris en compte dans la correction.