



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques — Mathématiques appliquées

2025

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie A : Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. a) On raisonne par récurrence. Initialement, $u_0 = 1 > 0$. Si $u_n > 0$, alors $e^{1/u_n} > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{1/u_n} > 0$. La suite est ainsi bien définie et strictement positive à tout rang.
1. b) Comme $1/u_n > 0$, on a $e^{1/u_n} > 1$. En multipliant par $u_n > 0$, il vient $u_{n+1} > u_n$. La suite est strictement croissante, et $u_n \geq 1$ pour tout n .
1. c) Une suite croissante admet soit une limite réelle, soit la limite $+\infty$. Supposons sa limite réelle, notée ℓ . Alors $\ell \geq 1$. Par continuité de $x \mapsto x e^{1/x}$ sur $]0, +\infty[$, le passage à la limite dans la récurrence donne $\ell = \ell e^{1/\ell}$. Puisque $\ell > 0$, cela entraîne $e^{1/\ell} = 1$, donc $1/\ell = 0$, contradiction. Ainsi $u_n \rightarrow +\infty$.
2. Question adaptée au programme actuel : le rôle de `np.exp` est documenté dans l'énoncé.

À chaque passage dans la boucle, `u` contient u_n . On poursuit exactement tant que le seuil n'est pas atteint :

Python

```
import numpy as np

u = 1
n = 0
while u < 10**6:
    u = u * np.exp(1 / u)
    n = n + 1
print(n)
```

La positivité assure que la division est définie ; la divergence vers $+\infty$ assure la terminaison. Puisque les indices sont parcourus successivement à partir de zéro, l'entier affiché est le premier convenable pour la suite calculée numériquement. Le calcul en

nombre flottant donne 999992 ; cette exécution numérique illustre la boucle et n'est pas une preuve exacte du franchissement du seuil par la suite réelle.

Partie B : Étude de la fonction f

3. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $e^{1/x} \rightarrow 1$, donc $f(x) \sim x$ et $f(x) \rightarrow +\infty$.

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, posons $t = 1/x \rightarrow +\infty$. Alors $f(x) = e^t/t \rightarrow +\infty$, par croissance comparée de l'exponentielle et d'une puissance. Ainsi $x = 0$ est une asymptote verticale de $\mathcal{C}_f$.

4. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = e^{1/x} + xe^{1/x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = e^{1/x} \frac{x-1}{x}.$$

Les facteurs $e^{1/x}$ et x sont strictement positifs. Ainsi f' est négative sur $]0, 1[$, nulle en 1, positive sur $]1, +\infty[$.

x	0^+	1	$+\infty$
f'	—	0	+
f	$+\infty$	e	$+\infty$

La fonction décroît strictement de $+\infty$ à e , puis croît strictement de e à $+\infty$. Elle admet en $x = 1$ un minimum global strict égal à e .

5. a) On reconnaît la série exponentielle en $1/x$, qui converge pour tout réel $1/x$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} = e^{1/x}.$$

Il s'agit de la série exponentielle usuelle, sans recours à une théorie générale des séries entières.

5. b) On sépare les termes d'indices zéro et un dans cette série convergente, puis on multiplie par x :

$$f(x) = x \left(1 + \frac{1}{x} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} \right) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}.$$

La convergence de la dernière série résulte directement de celle de la série précédente, par multiplication par la constante x^2 .

6. a) Pour $k \geq 2$ et $x \geq 1$, $0 < x^{2-k} \leq 1$. Tous les termes étant positifs, la somme est au moins son terme d'indice deux, égal à $1/2$.

Pour chaque somme partielle, la comparaison terme à terme donne

$$\sum_{k=2}^m \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!} \leq e.$$

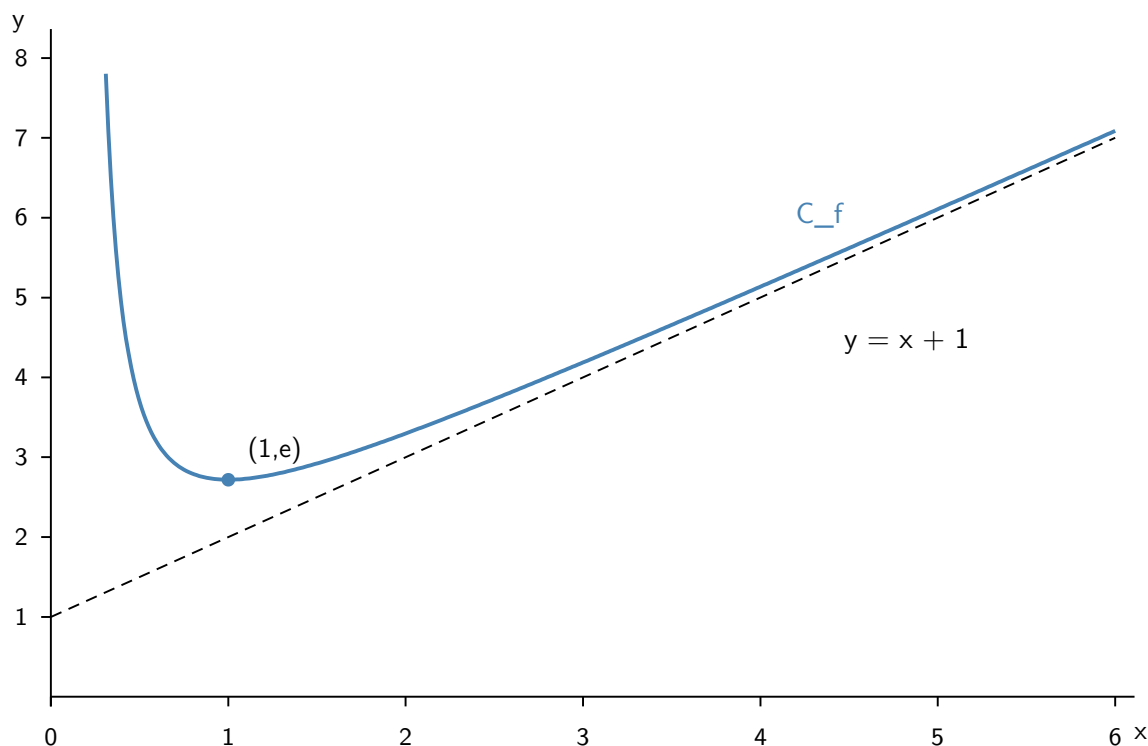
En passant à la limite dans ces sommes convergentes, on obtient les deux bornes demandées. On dispose même de la borne supérieure $e - 2$, mais e suffit ici.

6. b) Comme $x > 0$, on multiplie les bornes précédentes par $1/x$ sans changer les signes des inégalités, puis on utilise la question 5. b) :

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) - (x + 1) \leq \frac{e}{x}.$$

7. Les deux bornes de la question 6. b) tendent vers zéro lorsque $x \rightarrow +\infty$. Par encadrement, $f(x) - (x + 1) \rightarrow 0$. C'est exactement l'égalité $f(x) = x + 1 + o(1)$. La droite $y = x + 1$ est donc une asymptote oblique en $+\infty$.
8. Pour tout $x > 0$, la série de la question 5. b) est strictement positive ; par conséquent $f(x) > x + 1$. La courbe est au-dessus de son asymptote. Elle possède une branche infinie près de 0^+ , descend jusqu'au point $(1, e)$ où sa tangente est horizontale, puis remonte vers son asymptote oblique.

On peut aussi préciser sa convexité : en dérivant $f'(x) = e^{1/x}(1 - 1/x)$, on obtient $f''(x) = e^{1/x}/x^3 > 0$. Le tracé ci-dessous utilise les valeurs de la formule exacte.



Partie C : Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

9. a) Tous les termes sont strictement positifs, donc leurs logarithmes existent. La récurrence donne

$$\ln(u_{k+1}) = \ln(u_k) + \ln(e^{1/u_k}) = \ln(u_k) + \frac{1}{u_k},$$

d'où le résultat demandé.

9. b) En sommant l'égalité précédente de $k = 0$ à $n - 1$, les termes logarithmiques se simplifient deux à deux :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} = \ln(u_n) - \ln(u_0) = \ln(u_n),$$

puisque $u_0 = 1$.

10. a) On sait que $u_k \geq 1$, donc l'encadrement $(*)$ est applicable en $x = u_k$. Comme $f(u_k) = u_{k+1}$, il donne

$$\frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k - 1 \leq \frac{e}{u_k}.$$

L'ajout de 1 fournit les inégalités demandées.

10. b) On somme sur les indices $k = 0, \dots, n-1$. La somme centrale est télescopique et vaut $u_n - u_0 = u_n - 1$; la somme des termes constants vaut n . Ainsi

$$n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - 1 \leq n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

On remplace la somme par $\ln(u_n)$ d'après la question 9. b), puis on retranche n et on ajoute 1 :

$$1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e \ln(u_n).$$

11. a) Par croissance comparée, $\ln(t)/t \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Puisque $u_n \rightarrow +\infty$, on peut prendre $t = u_n$, ce qui donne $\ln(u_n)/u_n \rightarrow 0$.

11. b) On divise l'encadrement de la question 10. b) par $u_n > 0$:

$$\frac{1}{u_n} + \frac{1}{2} \frac{\ln(u_n)}{u_n} \leq 1 - \frac{n}{u_n} \leq \frac{1}{u_n} + e \frac{\ln(u_n)}{u_n}.$$

Les deux bornes tendent vers zéro, donc $n/u_n \rightarrow 1$. Pour $n \geq 1$, ces quotients sont positifs, et leur inverse tend également vers 1. Par conséquent $u_n \sim n$.

12. D'après la question 9. b), la somme étudiée est exactement $\ln(u_n)$. On ne compose pas simplement un équivalent par le logarithme : on écrit explicitement, pour $n \geq 2$,

$$\ln(u_n) = \ln n + \ln\left(\frac{u_n}{n}\right).$$

Le second terme tend vers zéro par continuité de $\ln$ en 1, alors que $\ln n \rightarrow +\infty$. Ainsi

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(u_n/n)}{\ln n} \rightarrow 1.$$

On conclut que

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1/u_k \sim \ln n.$$

Exercice 2

Partie A : Réduction simultanée et spectre

1. La famille (I, J, K) engendre $\mathcal{E}$ par définition. Pour montrer qu'elle est libre, supposons $aI + bJ + cK = 0$. Le coefficient $(1, 2)$ de cette égalité donne $b = 0$, le coefficient $(2, 3)$ donne $c = 0$, puis le coefficient $(2, 2)$ donne $a = 0$. La famille est donc une base de $\mathcal{E}$, et $\dim \mathcal{E} = 3$.
2. Les matrices J et K sont réelles et symétriques. Le résultat du programme selon lequel toute matrice symétrique réelle est diagonalisable s'applique à chacune d'elles. Elles sont donc diagonalisables sur $\mathbb{R}$.
3. a) Les produits matriciels donnent

$$J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2J.$$

3. b) Soit μ une valeur propre de J , et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. De $JX = \mu X$, on déduit $J^3 X = \mu^3 X$; mais $J^3 = 2J$, donc $(\mu^3 - 2\mu)X = 0$. Comme $X \neq 0$,

$\mu(\mu^2 - 2) = 0$. Ainsi $\mu \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$. Cette méthode utilise directement l'identité obtenue, sans déterminant.

4. a) On calcule

$$JU_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}U_1, \quad JU_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0U_2.$$

Les deux vecteurs sont non nuls. Ils sont donc propres, associés respectivement à $\sqrt{2}$ et à 0.

4. b) En changeant le signe de la première coordonnée de U_1 , on propose

$$U_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur est non nul et $JU_3 = {}^t(2, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}U_3$. Il convient donc.

5. a) Les vecteurs U_1, U_2, U_3 sont propres pour trois valeurs propres distinctes. Ils forment donc une famille libre. Comme $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est de dimension trois, cette famille de trois vecteurs en est une base.

5. b) La matrice formée de ces vecteurs comme colonnes est

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible puisque ses colonnes forment une base. Les égalités propres vérifiées donnent $JP = P \operatorname{diag}(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$; en multipliant à gauche par P^{-1} , on obtient bien la relation demandée.

6. a) La matrice K laisse inchangée la première coordonnée et échange les deux dernières. Par conséquent

$$KU_1 = U_1, \quad KU_2 = -U_2, \quad KU_3 = U_3.$$

Les vecteurs de la base précédente sont donc aussi des vecteurs propres de K .

6. b) En gardant le même ordre des colonnes de P , on obtient

$$P^{-1}KP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. a) Par distributivité du produit matriciel et par $P^{-1}IP = I$,

$$P^{-1}MP = aI + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP,$$

donc

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} + c & 0 & 0 \\ 0 & a - c & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} + c \end{pmatrix}.$$

7. b) Des matrices semblables ont les mêmes valeurs propres ; une matrice diagonale a pour valeurs propres ses coefficients diagonaux. Ainsi

$$\text{Sp}(M) = \{a + b\sqrt{2} + c, a - c, a - b\sqrt{2} + c\}.$$

Si certaines expressions sont égales, elles désignent la même valeur propre : l'ensemble peut contenir une, deux ou trois valeurs distinctes.

8. a) Les colonnes de S sont les coordonnées de $s(I) = (1, 1, 1)$, $s(J) = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ et $s(K) = (1, -1, 1)$. Ainsi

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

8. b) Méthode 1 — Noyau et dimension

Si $s(aI + bJ + cK) = 0$, on a

$$a + b\sqrt{2} + c = 0, \quad a - c = 0, \quad a - b\sqrt{2} + c = 0.$$

En soustrayant la troisième égalité à la première, $2\sqrt{2}b = 0$, donc $b = 0$. La deuxième donne $a = c$ et la première devient $2a = 0$. Ainsi $a = b = c = 0$ et $\text{Ker } s = \{0\}$.

L'application linéaire est injective entre deux espaces de même dimension finie trois ; elle est donc bijective.

Méthode 2 — Construction explicite de l'antécédent

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, résolvons $s(aI + bJ + cK) = (x, y, z)$. La différence des première et troisième coordonnées impose

$$b = \frac{x - z}{2\sqrt{2}}.$$

Leur somme donne $a + c = (x + z)/2$, tandis que $a - c = y$. On en déduit

$$a = \frac{x + z + 2y}{4}, \quad c = \frac{x + z - 2y}{4}.$$

Ces trois valeurs sont définies pour tout triplet et vérifient directement les trois équations. Chaque triplet possède donc un unique antécédent. Cette seconde méthode donne en plus une formule concrète pour s^{-1} .

Partie B : Un algorithme de coloration des graphes

9. Question adaptée au programme actuel : la construction et l'indexation des tableaux NumPy sont documentées dans l'énoncé.

Le sommet j doit être distinct de i et relié à i , ce qui équivaut ici à $A[i, j] = 1$.

Python

```
import numpy as np

def voisins(A, i):
    n = len(A[i])
    V = []
    for j in range(n):
        if j != i and A[i, j] == 1:
            V.append(j)
    return V
```

La boucle parcourt tous les numéros de sommets, de zéro à $n - 1$. La liste renvoyée contient exactement les voisins, dans l'ordre croissant de leur numéro.

10. On teste successivement les entiers naturels à partir de zéro :

Python

```
def min_ext(L):  
    m = 0  
    while m in L:  
        m = m + 1  
    return m
```

Comme la liste est finie, il existe un entier qui n'y apparaît pas et la boucle termine. À sa sortie, tous les entiers strictement inférieurs à m ont été trouvés dans L , tandis que m n'y appartient pas. La valeur renvoyée est donc la plus petite possible. Pour $[1, 0, 3]$, les tests éliminent zéro puis un, et renvoient deux.

11. La compréhension initiale produit la coloration triviale, et la liste des couleurs des voisins est obtenue à partir de leurs indices :

Python

```
import numpy as np  
  
def voisins(A, i):  
    n = len(A[i])  
    V = []  
    for j in range(n):  
        if j != i and A[i, j] == 1:  
            V.append(j)  
    return V  
  
def min_ext(L):  
    m = 0  
    while m in L:  
        m = m + 1  
    return m  
  
def coloration(A):
```

```
n = len(A[0])
C = [i for i in range(n)]
for i in range(1, n):
    C_voisins = [C[j] for j in voisins(A, i)]
    C[i] = min_ext(C_voisins)
return C
```

Initialement, deux sommets distincts ont des couleurs différentes. À chaque modification de C_i , sa nouvelle couleur diffère de celle de tous ses voisins au moment de la modification ; les arêtes non incidentes à s_i ne sont pas affectées. La propriété de coloration est donc préservée à chaque étape. Ce procédé essaie de réduire les couleurs mais ne garantit pas un minimum global. Il prend en compte tous les voisins, y compris ceux qui n'ont pas encore été traités, conformément à l'algorithme donné.

12. a) Les listes de voisins déduites de la figure sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= [1, 3, 4], \quad \mathcal{V}_1 = [0, 2, 5], \quad \mathcal{V}_2 = [1, 3, 5], \quad \mathcal{V}_3 = [0, 2, 4], \quad \mathcal{V}_4 = [0, 3, 5], \quad \mathcal{V}_5 \\ &= [1, 2, 4]. \end{aligned}$$

On part de $C = [0, 1, 2, 3, 4, 5]$. Pour $i = 1$, les couleurs voisines sont $[0, 2, 5]$, donc $C_1 = 1$. Pour $i = 2$, elles sont $[1, 3, 5]$, donc $C_2 = 0$. Pour $i = 3$, elles sont $[0, 0, 4]$, donc $C_3 = 1$. Pour $i = 4$, elles sont $[0, 1, 5]$, donc $C_4 = 2$. Enfin, pour $i = 5$, elles sont $[1, 0, 2]$, donc $C_5 = 3$.

La liste renvoyée est $[0, 1, 0, 1, 2, 3]$: cette exécution emploie quatre couleurs.

12. b) Oui. On peut choisir

$$[c(s_0), c(s_1), c(s_2), c(s_3), c(s_4), c(s_5)] = [0, 1, 2, 1, 2, 0].$$

Dans le triangle (s_0, s_3, s_4) , les couleurs sont respectivement zéro, un et deux ; dans (s_1, s_2, s_5) , elles sont un, deux et zéro. Les trois arêtes reliant ces triangles, (s_0, s_1) , (s_3, s_2) et (s_4, s_5) , relient aussi des couleurs différentes. Toutes les neuf arêtes satisfont

donc la condition. Le triangle (s_0, s_3, s_4) impose au moins trois couleurs, donc trois est ici le minimum.

Exercice 3

Partie A : La variable aléatoire V

1. a) Comme $0 < U \leq 1$, on a $0 < \sqrt{U} \leq 1$ puis $V = 1/\sqrt{U} \geq 1$. La variable est finie et positive, à valeurs dans $[1, +\infty[$.

1. b) Pour $x < 1$, l'événement $(V \leq x)$ est impossible, donc $F_V(x) = 0$. Pour $x \geq 1$, les quantités manipulées sont positives et

$$\left(\frac{1}{\sqrt{U}} \leq x\right) = \left(U \geq \frac{1}{x^2}\right).$$

L'uniforme n'ayant pas d'atome, $P(U \geq t) = 1 - t$ pour $t \in [0, 1]$. Ainsi $F_V(x) = 1 - 1/x^2$ pour $x \geq 1$, y compris en $x = 1$ où cette valeur est zéro.

1. c) La fonction obtenue est continue en 1, et sur tout $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La variable V est donc à densité; on peut choisir

$$f_V(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$$

Cette fonction est positive, possède des limites finies à gauche et à droite en tout réel, et son intégrale vaut $[-1/x^2]_1^{+\infty} = 1$.

2. La variable étant positive, l'existence de l'espérance est équivalente à la convergence

de $\int_1^{+\infty} 2/x^2 \, dx$. Pour $b > 1$,

$$\int_1^b \frac{2}{x^2} \, dx = 2 - \frac{2}{b} \rightarrow 2.$$

L'intégrale converge absolument ; ainsi $E(V) = 2$.

En revanche,

$$\int_1^b x^2 f_V(x) dx = \int_1^b \frac{2}{x} dx = 2 \ln b \rightarrow +\infty.$$

La variable n'admet pas de moment d'ordre deux fini, donc pas de variance finie. On peut aussi vérifier directement la divergence de l'intégrale de $(x-2)^2 f_V(x)$: pour $x \geq 4$, $(x-2)^2 \geq x^2/4$, ce qui minore son intégrande par $1/(2x)$.

Partie B : Loi du sinistre le plus coûteux

3. a) Pour tout réel x ,

$$(M_n \leq x) = \bigcap_{i=1}^n (V_i \leq x).$$

L'indépendance mutuelle des V_i permet de multiplier ces probabilités, et les lois identiques donnent

$$F_n(x) = \prod_{i=1}^n F_V(x) = (F_V(x))^n.$$

3. b) Pour $x < 1$, $F_n(x) = 0$. Pour $x \geq 1$ fini, $0 \leq 1 - 1/x^2 < 1$, donc $(1 - 1/x^2)^n \rightarrow 0$.

Ainsi, pour tout réel x , $F_n(x) \rightarrow 0$.

3. c) Question adaptée au programme actuel : le fait particulier sur les points de continuité utilisé ici est fourni dans le sujet.

Supposons que M_n converge en loi vers une variable aléatoire réelle X . D'après le fait admis, on peut choisir un point de continuité x de F_X tel que $F_X(x) > 1/2$. La définition de la convergence en loi impose alors $F_n(x) \rightarrow F_X(x) > 1/2$, alors que la question 3. b) donne $F_n(x) \rightarrow 0$. Cette contradiction exclut toute limite en loi réelle.

Résultat admis dans cette version adaptée : si X est une variable aléatoire réelle, il existe un point de continuité x de sa fonction de répartition tel que $P(X \leq x) > 1/2$. Il sert

uniquement à exclure toutes les lois limites possibles ; les questions suivantes utilisent directement F_W .

4. a) Fixons $x > 0$. Pour tout n assez grand, $x\sqrt{n} \geq 1$ et

$$G_n(x) = P(M_n \leq x\sqrt{n}) = F_n(x\sqrt{n}) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n.$$

Pour n assez grand le terme entre parenthèses est strictement positif. Le développement limité usuel de $\ln(1+t)$ à l'ordre un, avec $t = -1/(nx^2)$, donne

$$n \ln \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) = -\frac{1}{x^2} + o(1).$$

En appliquant la continuité de l'exponentielle à cette convergence, on obtient

$G_n(x) \rightarrow e^{-1/x^2}$. Aucun calcul général sur la convergence en loi n'intervient.

4. b) Pour $x \leq 0$, $G_n(x) = 0$, car $M_n/\sqrt{n} > 0$. Pour $x > 0$, la question précédente donne $G_n(x) \rightarrow F_W(x)$. De plus, F_W est continue sur chaque demi-droite et en zéro puisque $e^{-1/x^2} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$. On a donc la convergence des fonctions de répartition en tout point de continuité de F_W , ce qui signifie

$$\frac{M_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} W.$$

Partie C : Manipulation d'une base de données

Le schéma utile à ces trois requêtes est `sinistres(id INTEGER, annee INTEGER, mois TEXT, montant INTEGER)`.

5. a) La clause `WHERE` sélectionne les lignes de l'année demandée et `SELECT` conserve leur montant :

SQL

```
SELECT montant
FROM sinistres
WHERE annee = 2024;
```

Chaque sinistre de cette année contribue une ligne, même si plusieurs montants sont

identiques.

5. b) «Dépasse» impose une inégalité stricte. Les deux colonnes demandées sont sélectionnées dans cet ordre :

SQL

```
SELECT mois, annee
FROM sinistres
WHERE montant > 1000000;
```

6. On précise les colonnes pour associer sans ambiguïté chaque valeur à son attribut ; le mois est une chaîne en minuscules :

SQL

```
INSERT INTO sinistres (id, annee, mois, montant)
VALUES (7652, 2025, 'avril', 1540);
```

Il s'agit de la nouvelle ligne décrite, ajoutée à l'historique initialement arrêté à 2024.

Partie D : Nombre de sinistres graves

7. Puisque $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $\lambda > 0$, son support est $\mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} > 0.$$

Les probabilités conditionnelles sachant $(N = n)$ sont donc toutes définies.

8. Le nombre de sinistres graves est un entier entre zéro et N , donc T prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Chaque entier k est possible : l'événement où $N = k$ et où les k coûts dépassent A a une probabilité $e^{-\lambda} \lambda^k / k! (1/A^2)^k > 0$ pour $k \geq 1$, grâce à l'indépendance précisée dans le sujet. Pour zéro, $P(N = 0) > 0$ suffit. Ainsi $T(\Omega) = \mathbb{N}$ au sens des valeurs possibles de probabilité positive.

9. a) Question adaptée au programme actuel : l'indépendance du nombre N et de la suite des coûts est explicitée, car elle est nécessaire à la conclusion demandée.

Posons $p = P(V > A) = 1 - F_V(A) = 1/A^2 \in]0, 1[$. Sur l'événement $(N = n)$, le nombre T compte les réussites parmi les n événements $(V_i > A)$, $1 \leq i \leq n$. Ces événements sont indépendants et de probabilité p . L'indépendance entre N et les coûts assure que le conditionnement par $(N = n)$ ne modifie ni ces probabilités ni leur indépendance. Ainsi la loi conditionnelle est $\mathcal{B}(n, p) = \mathcal{B}(n, 1/A^2)$.

9. b) Pour $0 \leq k \leq n$, la loi binomiale donne

$$P_{(N=n)}(T = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k}.$$

Pour $k > n$, cette probabilité est nulle car il ne peut pas y avoir plus de sinistres graves que de sinistres.

10. On conserve $p = 1/A^2$. Pour $n = 0$, on a nécessairement $T = 0$, ce qui complète la formule conditionnelle avec la loi certaine en zéro. La famille $((N = n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de probabilités strictement positives. La formule des probabilités totales donne, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$P(T = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Les termes sont positifs ; les indices $n < k$ contribuent zéro. En utilisant $\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!)$ et en posant $m = n - k$, il vient

$$P(T = k) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!}.$$

La dernière série est la série exponentielle convergente, de somme $e^{\lambda(1-p)}$. On obtient donc

$$P(T = k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}.$$

Il s'agit de la loi de Poisson de paramètre $\lambda p = \lambda/A^2$.

11. La loi reconnue admet une espérance et sa moyenne est égale à son paramètre. Le nombre moyen de sinistres graves en un an vaut donc

$$E(T) = \frac{\lambda}{A^2}.$$

Relevé des adaptations

- Exercice 1, question 2 : documentation de `np.exp`, dont le rôle est nécessaire pour compléter le programme.
- Exercice 2, partie B, questions 9 à 12 : documentation de `np.array` et de l'indexation des tableaux. Les figures des questions 9 et 12 sont retranscrites en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les positions mesurées ; seules leurs arêtes et leurs étiquettes portent une information mathématique, sans coordonnées géométriques imposées.
- Exercice 3, question 3. c) : fourniture du fait précis sur les points de continuité nécessaire pour exclure une limite de loi arbitraire, afin de ne pas exiger une théorie supplémentaire des discontinuités des fonctions de répartition.
- Exercice 3, partie D, questions 8 à 11 : ajout de l'indépendance entre N et la suite (V_i) , absente du PDF mais indispensable à la loi conditionnelle binomiale, puis à la loi de Poisson demandée ; précision de la convention lorsque $N = 0$. Cette hypothèse répare le modèle sans modifier les questions ni les résultats attendus.