



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques — Mathématiques appliquées

2024

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.

Partie A : Résolution d'un système différentiel

On considère l'équation différentielle $(E) : x'(t) = -x(t) + e^{-t}$, où x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. a) Résoudre l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur $\mathbb{R}$.
1. b) Déterminer une solution particulière x_0 de (E) de la forme $x_0 : t \mapsto (at + b)e^{-t}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
1. c) Résoudre l'équation différentielle (E) .

On s'intéresse maintenant au système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t), \\ y'(t) = -y(t), \end{cases}$$

où x et y désignent des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. a) Donner la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $(S) \iff X'(t) = AX(t)$ avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \text{ La matrice } A \text{ est-elle diagonalisable?}$$

2. b) Justifier l'existence d'une unique solution (x, y) de (S) telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.

2. c) Déterminer cette solution (x, y) en vous aidant de la question 1.
2. d) Étudier la convergence de la solution (x, y) vers un état d'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$.
3. Recopier et compléter le programme en langage Python ci-dessous de manière à ce qu'il produise le graphique représentant la trajectoire $t \mapsto (x(t), y(t))$ pour $t \in [-2, 10]$.

On rappelle que `np.linspace(-2, 10, 200)` crée un tableau de 200 valeurs régulièrement espacées allant de -2 à 10 . La commande `plt.title(texte)` fixe le titre; `plt.plot(x, y)` relie dans l'ordre les points dont les coordonnées sont contenues dans les listes `x` et `y`; `plt.show()` affiche la figure.

Python

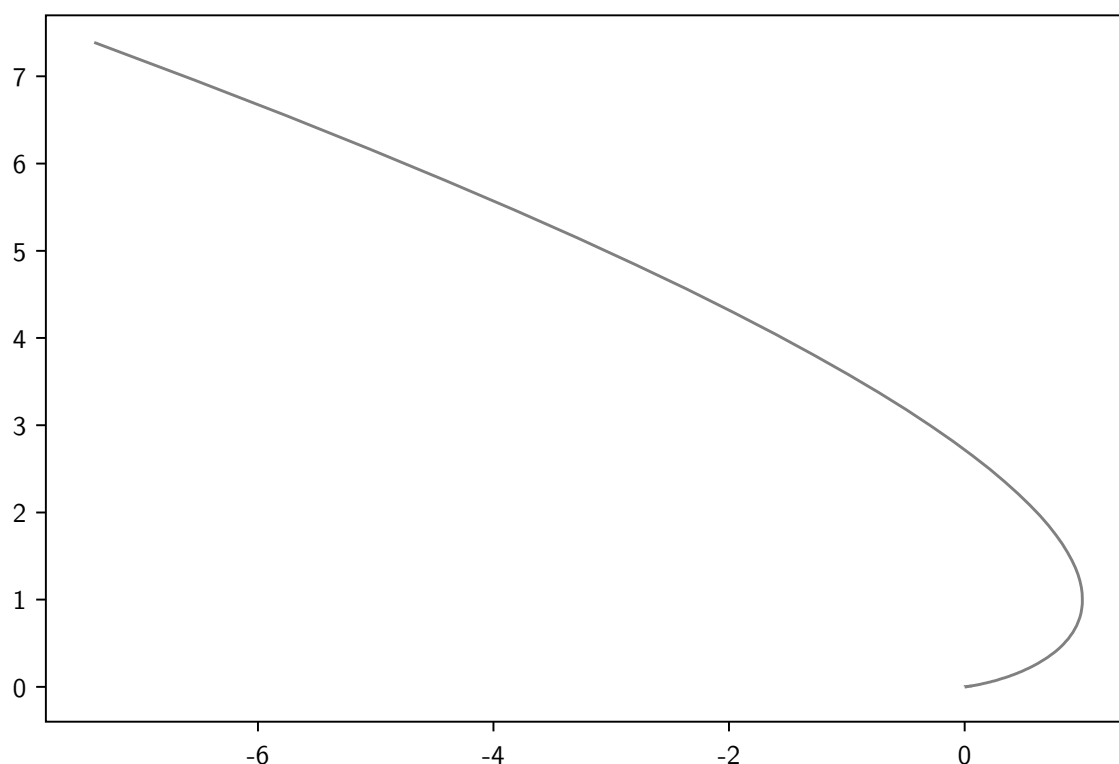
```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(-2, 10, 200)
x = [... for t in T]
y = [... for t in T]

plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot(...)
plt.show()
```

Trajectoire de la solution



Partie B : Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = (x + 1)e^{kx}$. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. a) Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. b) Dresser le tableau de variation de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et en 0 .
5. a) Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.
5. b) Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$.

Partie C : Étude d'une suite implicite

6. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée u_k .
6. b) Déterminer explicitement u_1 .
7. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a $0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}$. En déduire que la suite (u_k) converge et donner sa limite.
8. a) Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer que $u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}$.
8. b) En déduire que $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.
9. Quelle est la nature de la série

$$\sum_{k \geq 1} u_k$$

? Pour justifier une éventuelle divergence sans résultat général sur les séries de référence, on pourra regrouper les termes d'indices $2^m + 1$ à 2^{m+1} et minorer chaque paquet.

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre deux suivantes :

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : AM = MA\}$.

Partie A : Étude de A et de $\mathcal{C}$

1. Calculer A^2 . En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Justifier que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. a) Résoudre l'équation $AM = MA$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. b) Montrer que (I_2, A) est une base de $\mathcal{C}$.
5. Soient M et N deux matrices quelconques de $\mathcal{C}$.
5. a) Montrer que le produit MN appartient à $\mathcal{C}$.
5. b) Montrer que M et N commutent, c'est-à-dire que $MN = NM$.
6. Soit M une matrice non nulle de $\mathcal{C}$. Montrer que M est inversible et que M^{-1} appartient à $\mathcal{C}$.

Partie B : Toute équation du second degré admet une solution dans $\mathcal{C}$

On fixe un polynôme unitaire du second degré à coefficients réels $P(x) = x^2 + ux + v$ avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On note $\Delta = u^2 - 4v$ son discriminant. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{C}$ telle que $P(M) = 0_2$.

7. Soit $M = aI_2 + bA$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

7. a) Montrer que $M^2 = (a^2 - b^2)I_2 + 2abA$.

7. b) En déduire que $P(M) = 0_2 \iff \begin{cases} a^2 - b^2 + ua + v = 0, \\ 2ab + ub = 0. \end{cases}$

8. Dans cette question, on montre que le système ci-dessus admet au moins une solution $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ en distinguant deux cas.

8. a) Si $\Delta \geq 0$, montrer que le système admet au moins une solution de la forme $(a, 0)$.

8. b) Si $\Delta < 0$, montrer que le système admet au moins une solution (a, b) avec $b \neq 0$.

9. En vous aidant de la question précédente, donner une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_2 = 0_2$.

Partie C : Un endomorphisme bijectif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = AMA$.

On note (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

11. Calculer $\varphi \circ \varphi$. En déduire que l'endomorphisme φ est bijectif, et donner φ^{-1} .

12. a) Calculer $\varphi(E_1), \dots, \varphi(E_4)$, puis donner la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

12. b) Justifier sans calcul que B est diagonalisable et que $\text{Sp}(B) = \{-1, 1\}$. On pourra remarquer que $B^2 = I_4$, où I_4 est la matrice identité d'ordre 4.

12. c) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de B .

Exercice 3

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N , et on effectue une succession illimitée de tirages indépendants et équiprobables d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule obtenue au k -ième tirage.

Pour tout entier $i \in \{1, \dots, N\}$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéros distincts : $T_i = k$ si on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages, mais seulement $i - 1$ numéros distincts lors des $k - 1$ premiers tirages.

Exemple : on suppose $N = 4$. Si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7
X_i	2	3	3	3	1	2	1

Tableau — suite 2/2

i	8
X_i	4

alors $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5$ et $T_4 = 8$.

Partie A : Simulation informatique

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_k .
2. Le programme en langage Python ci-dessous définit une fonction ajout qui prend en argument une liste L et un entier x.

Python

```
def ajout(L, x):  
    if (x in L) == False:  
        L.append(x)
```

Expliquer succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande ajout(L, x) modifie la liste L.

3. Recopier et compléter la fonction Python Simul_T ci-dessous. Cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1, \dots, N\}$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i . Dans le script, L est la liste sans répétition des numéros sortis lors des tirages effectués ; k est le rang du tirage en cours ; x est le résultat du tirage en cours.

La commande `rd.randint(1, N+1)` renvoie un entier uniforme dans $\{1, \dots, N\}$, la borne supérieure étant exclue.

Python

```
import numpy.random as rd  
  
def Simul_T(N, i):  
    L = []  
    k = 0  
    while ...:  
        x = rd.randint(1, N+1)  
        ajout(L, x)  
        k = ...  
    return ...
```

4. On suppose $N = 3$. Rédiger un programme Python qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de $\text{Simul_T}(3, 2)$. Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

Partie B : Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

Dans cette partie, on suppose $N = 3$: l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3.

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2 .
6. Soit $k \geq 2$ un entier fixé.
6. a) Décrire l'événement $\{T_2 = k\} \cap \{X_1 = 1\}$ à l'aide d'événements $\{X_j = 1\}$ et $\{X_j \neq 1\}$ avec $j \in \mathbb{N}^*$.
6. b) En déduire $P(\{T_2 = k\} \cap \{X_1 = 1\})$.
6. c) Montrer que $P(T_2 = k) = \frac{2}{3^{k-1}}$.
7. Justifier que T_2 admet une espérance et la calculer.
8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$. Reconnaître une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

Partie C : Quelques résultats dans le cas général

On retourne au cas général : l'urne contient N boules numérotées de 1 à N .

Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on note Z_i la variable aléatoire définie par $Z_1 = 1$ et, pour $i \geq 2$, $Z_i = T_i - T_{i-1}$.

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires, après le T_{i-1} -ième tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i - 1$ numéros déjà tirés.

On admet que les variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_N$ sont indépendantes.

Décomposition de T_i

9. Soit $i \in \{2, \dots, N\}$.

9. a) Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{N-i+1}{N}$.

9. b) Exprimer $E(Z_i)$ et $V(Z_i)$ en fonction de i et N . Vérifier que ces formules restent vraies pour $i = 1$.

10. Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \dots, Z_i$.

Loi de T_3

Dans la question 11, on suppose $N \geq 3$.

11. a) Calculer $P(\{Z_2 = \ell\} \cap \{Z_3 = k\})$ pour tous ℓ et k dans $\mathbb{N}^*$.

11. b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$P(Z_2 + Z_3 = n) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N} \right)^n - \frac{2}{N^n} \right).$$

11. c) Déterminer la loi de T_3 .

Espérance et covariance

12. Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. Montrer que

$$E(T_i) = N \sum_{k=N-i+1}^N \frac{1}{k}.$$

13. Soient i et j deux entiers tels que $1 \leq i \leq j \leq N$. Montrer que $\text{Cov}(T_i, T_j) = V(T_i)$, où $\text{Cov}(T_i, T_j)$ désigne la covariance de T_i et T_j .