



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques — Mathématiques appliquées

2024

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie A : Résolution d'un système différentiel

1. a) L'équation homogène s'écrit $x' + x = 0$. Ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions $x(t) = Ce^{-t}$, où $C \in \mathbb{R}$.
1. b) Pour $x_0(t) = (at + b)e^{-t}$, on a $x'_0(t) = (a - at - b)e^{-t}$. Ainsi $x'_0 + x_0 = ae^{-t}$. Cette fonction est solution de (E) si et seulement si $a = 1$, sans restriction sur b . On peut choisir $b = 0$, ce qui donne $x_0(t) = te^{-t}$.

1. c) Méthode 1 — Solution particulière et équation homogène

Si x est solution de (E) , alors $x - x_0$ vérifie l'équation homogène, puisque $(x - x_0)' + (x - x_0) = 0$. Réciproquement, ajouter à x_0 une solution homogène donne une solution de (E) . Les solutions sont donc exactement

$$x(t) = (t + C)e^{-t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Méthode 2 — Produit par une exponentielle

L'équation est équivalente à $(e^t x(t))' = 1$. Par intégration sur $[0, t]$, avec la convention usuelle si $t < 0$, $e^t x(t) - x(0) = t$. On retrouve $x(t) = (t + C)e^{-t}$. La première méthode réutilise les questions précédentes ; la seconde permet de retrouver directement la constante initiale.

$$2. a) \text{ L'écriture matricielle donne } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre et $(a, b) \neq (0, 0)$ un vecteur propre, la seconde équation

donne $(\lambda + 1)b = 0$. Si $\lambda \neq -1$, alors $b = 0$, puis la première équation impose $a = 0$, ce qui est impossible. La seule valeur propre possible est -1 ; elle est effectivement valeur propre, et son sous-espace propre est $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$, de dimension 1. Il n'existe donc pas de base de deux vecteurs propres : A n'est pas diagonalisable.

2. b) Le système $X' = AX$ est linéaire à matrice réelle constante, et la condition initiale

est $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le résultat d'existence et d'unicité du problème de Cauchy donne une unique solution sur $\mathbb{R}$.

On peut aussi le vérifier directement, sans diagonalisation : $y' = -y$ et $y(0) = 1$ imposent $y(t) = e^{-t}$. L'équation de x devient alors (E) et $x(0) = 1$ fixe son unique constante. Cette résolution scalaire guidée suffit même si A n'est pas diagonalisable.

2. c) D'après la question précédente, $y(t) = e^{-t}$. La question 1 donne $x(t) = (t + C)e^{-t}$, et $x(0) = 1$ impose $C = 1$. Ainsi

$$x(t) = (t + 1)e^{-t}, \quad y(t) = e^{-t}.$$

La substitution vérifie les deux équations et les conditions initiales.

2. d) Lorsque $t \rightarrow +\infty$, $e^{-t} \rightarrow 0$ et $te^{-t} \rightarrow 0$ par croissance comparée. Par conséquent $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$.

Un état d'équilibre (a, b) doit satisfaire $-a + b = 0$ et $-b = 0$. Il s'agit donc nécessairement de $(0, 0)$, qui satisfait bien ces deux égalités. La solution converge vers l'unique état d'équilibre.

3. Il faut calculer les deux coordonnées pour chaque valeur de T , puis tracer y en fonction de x , et non chaque coordonnée en fonction du temps.

Python

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(-2, 10, 200)
x = [(t + 1) * np.exp(-t) for t in T]
y = [np.exp(-t) for t in T]

plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

Les listes contiennent chacune 200 coordonnées. Le premier point est $(-e^2, e^2)$ et le dernier est $(11e^{-10}, e^{-10})$, proche de l'origine. La coordonnée x atteint son maximum 1 à $t = 0$, car $x'(t) = -te^{-t}$. Ces propriétés expliquent le retour de la trajectoire vers l'origine.

Partie B : Étude d'une suite de fonctions

4. a) Comme $k > 0$, les croissances comparées donnent $xe^{kx} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow -\infty$. Il en est de même de e^{kx} , donc $f_k(x) \rightarrow 0$. Pour $x < -1$, $f_k(x) < 0$: cette limite est atteinte par valeurs négatives.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, les deux facteurs $x + 1$ et e^{kx} tendent vers $+\infty$, donc $f_k(x) \rightarrow +\infty$.

4. b) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'_k(x) = (1 + k(x + 1))e^{kx} = k \left(x + 1 + \frac{1}{k} \right) e^{kx}.$$

Comme $ke^{kx} > 0$, la dérivée est négative pour $x < -1 - 1/k$, nulle en $a_k = -1 - 1/k$, positive pour $x > a_k$. Le minimum est $f_k(a_k) = -e^{-k-1}/k$. En outre, $f_k(-1) = 0$ et $f_k(0) = 1$.

x	$-\infty$	a_k	-1	0	$+\infty$
f_k	0	minimum	0	1	$+\infty$
variation	décroît	puis croît	croît	croît	

Le minimum indiqué dans le tableau vaut $-e^{-k-1}/k$.

5. a) Pour comparer les courbes, on factorise leur différence :

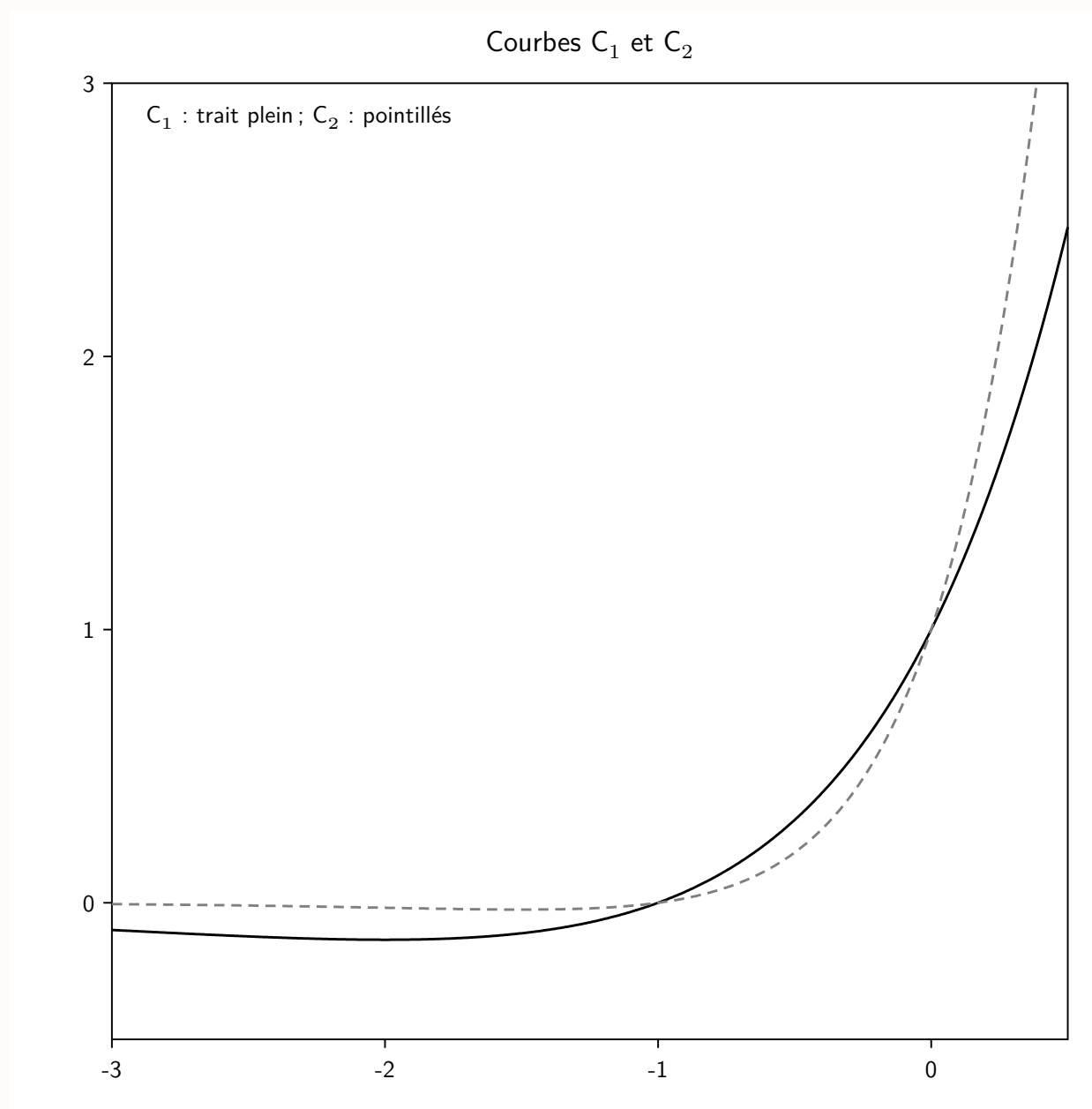
$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)e^{kx}(e^x - 1).$$

Le facteur e^{kx} est strictement positif. Le produit est strictement positif pour $x < -1$, strictement négatif pour $-1 < x < 0$, et strictement positif pour $x > 0$. Il s'annule exactement pour $x = -1$ et $x = 0$.

Ainsi $\mathcal{C}_{k+1}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_k$ sur $] -\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, au-dessous sur $] -1, 0[$. Les deux points d'intersection sont $(-1, 0)$ et $(0, 1)$.

5. b) Chaque courbe tend vers l'axe des abscisses par dessous en $-\infty$, descend jusqu'à son minimum, puis remonte vers $+\infty$. Les deux courbes passent par $(-1, 0)$ et $(0, 1)$, avec les positions relatives établies à la question précédente. Le minimum de $\mathcal{C}_{k+1}$ a pour abscisse $-1 - 1/(k+1)$, plus grande que celle du minimum de $\mathcal{C}_k$; il est également moins bas.

La figure suivante représente le cas $k = 1$, avec des coordonnées calculées à partir des fonctions exactes. Elle illustre la même disposition pour tout $k \geq 1$; les positions exactes des minima sont celles données ci-dessus.



Partie C : Étude d'une suite implicite

6. a) Pour $x < -1$, $f_k(x) < 0 < k$, donc aucune solution n'existe dans cet intervalle. Sur $[-1, +\infty[$, f_k est continue et strictement croissante, avec $f_k(-1) = 0$ et limite $+\infty$. Le théorème de la bijection montre que chaque $k > 0$ possède un unique antécédent dans cet intervalle. Il s'agit de l'unique solution réelle u_k .
6. b) Comme $f_1(0) = 1$, l'unicité précédente donne $u_1 = 0$.

7. Sur $[-1, +\infty[$, la fonction f_k est croissante, et $f_k(0) = 1 \leq k = f_k(u_k)$. Par conséquent $u_k \geq 0$. L'équation définissant u_k donne

$$e^{ku_k} = \frac{k}{1+u_k} \leq k,$$

car $1+u_k \geq 1$. En prenant le logarithme, qui est croissant sur $]0, +\infty[$, puis en divisant par $k > 0$, on obtient $u_k \leq \ln(k)/k$.

Les deux bornes sont valables aussi pour $k = 1$, où elles valent zéro. Comme $\ln(k)/k \rightarrow 0$, l'encadrement donne $u_k \rightarrow 0$.

8. a) Les quantités $1+u_k$, e^{ku_k} et k sont strictement positives. On peut donc prendre le logarithme de $(1+u_k)e^{ku_k} = k$, ce qui donne $\ln(1+u_k) + ku_k = \ln(k)$. On en déduit l'égalité demandée.

8. b) Pour $k \geq 2$, $\ln(k) > 0$ et

$$\frac{u_k}{\ln(k)/k} = 1 - \frac{\ln(1+u_k)}{\ln(k)}.$$

La continuité du logarithme et $u_k \rightarrow 0$ donnent $\ln(1+u_k) \rightarrow 0$, tandis que $\ln(k) \rightarrow +\infty$. Le second quotient tend donc vers zéro. Ainsi $u_k \sim \ln(k)/k$.

9. Question adaptée au programme actuel : le regroupement suggéré établit directement le résultat particulier, sans invoquer un théorème général sur les séries de référence hors d'un problème de probabilités discrètes.

Les termes sont positifs ou nuls. D'après l'équivalent précédent, pour tout k assez grand, $u_k \geq \ln(k)/(2k)$. Pour $k \geq 3$, $\ln(k) \geq 1$, donc, à partir d'un certain rang, $u_k \geq 1/(2k)$. Prenons m assez grand pour que cette minoration soit valable pour tous les indices du paquet $2^m + 1, \dots, 2^{m+1}$. Chacun des 2^m termes de ce paquet est au moins égal à $1/2^{m+2}$. Par conséquent

$$\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} u_k \geq \frac{1}{4}.$$

En juxtaposant un nombre arbitrairement grand de ces paquets, on obtient des sommes partielles arbitrairement grandes. Les sommes partielles sont en outre croissantes puisque les termes sont positifs. La série

$$\sum_{k \geq 1} u_k$$

diverge donc vers $+\infty$.

Exercice 2

Partie A : Étude de A et de $\mathcal{C}$

1. Le produit matriciel donne $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$. Ainsi $A(-A) = (-A)A = I_2$,

$$\text{donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ était valeur propre avec un vecteur propre non nul X , alors $A^2X = \lambda^2X$. Or $A^2X = -X$, donc $(\lambda^2 + 1)X = 0$. Cela imposerait $\lambda^2 = -1$, impossible pour un réel. La matrice A ne possède aucune valeur propre réelle, et ne peut donc pas admettre une base réelle de vecteurs propres. Elle n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
3. La matrice nulle appartient à $\mathcal{C}$. Si $M, N \in \mathcal{C}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$A(\alpha M + \beta N) = \alpha AM + \beta AN = \alpha MA + \beta NA = (\alpha M + \beta N)A.$$

L'ensemble $\mathcal{C}$ est non vide et stable par combinaisons linéaires : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. a) Écrivons $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. On calcule

$$AM = \begin{pmatrix} -r & -s \\ p & q \end{pmatrix}, \quad MA = \begin{pmatrix} q & -p \\ s & -r \end{pmatrix}.$$

L'égalité équivaut à $s = p$ et $q = -r$. Ainsi les solutions sont exactement les matrices

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aI_2 + bA, \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

4. b) L'égalité précédente montre que (I_2, A) engendre $\mathcal{C}$. Si $aI_2 + bA = 0_2$, la lecture des coefficients donne $a = b = 0$. La famille est donc libre. C'est une base de $\mathcal{C}$ et $\dim \mathcal{C} = 2$.

5. a) Méthode 1 — Utiliser les relations de commutation

Comme $AN = NA$ et $AM = MA$, l'associativité donne

$A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN) = M(NA) = (MN)A$. Le produit MN appartient donc à $\mathcal{C}$.

Méthode 2 — Utiliser la base de $\mathcal{C}$

Écrivons $M = aI_2 + bA$ et $N = cI_2 + dA$. La distributivité et $A^2 = -I_2$ donnent

$MN = (ac - bd)I_2 + (ad + bc)A$, qui appartient à $\mathcal{C}$. La première méthode utilise directement la définition ; la seconde fournit en plus les coefficients du produit.

5. b) En échangeant les rôles de (a, b) et (c, d) dans la formule précédente, on obtient $NM = (ca - db)I_2 + (cb + da)A = MN$. Deux matrices quelconques de $\mathcal{C}$ commutent donc entre elles.

6. Méthode 1 — Construire l'inverse

Écrivons $M = aI_2 + bA \neq 0_2$. La liberté de (I_2, A) donne $(a, b) \neq (0, 0)$, donc $a^2 + b^2 > 0$. Le calcul

$$(aI_2 + bA)(aI_2 - bA) = (a^2 + b^2)I_2$$

est valable dans les deux ordres. Ainsi $M^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2}I_2 - \frac{b}{a^2 + b^2}A$, qui appartient à $\mathcal{C}$.

Méthode 2 — Inversibilité d'une matrice d'ordre deux

Pour $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, le déterminant d'ordre deux vaut $a^2 + b^2 > 0$. Le critère

d'inversibilité d'ordre deux et la formule de l'inverse donnent

$$M^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a la forme décrite à la question 4, donc appartient à $\mathcal{C}$. La construction par produit explique la forme de l'inverse ; le déterminant d'ordre deux constitue une vérification directe conforme au programme.

Partie B : Toute équation du second degré admet une solution dans $\mathcal{C}$

7. a) Comme $I_2 A = A I_2 = A$, on développe :

$$M^2 = a^2 I_2 + abA + abA + b^2 A^2 = (a^2 - b^2) I_2 + 2abA.$$

7. b) Par conséquent

$$P(M) = M^2 + uM + vI_2 = (a^2 - b^2 + ua + v)I_2 + (2ab + ub)A.$$

La liberté de (I_2, A) montre que cette matrice est nulle si et seulement si ses deux coefficients sont nuls, ce qui donne exactement le système demandé.

8. a) Si $b = 0$, la seconde équation est vérifiée et la première devient $a^2 + ua + v = 0$. Son discriminant est $\Delta \geq 0$, donc $a = (-u + \sqrt{\Delta})/2$ est une solution réelle. Le couple $(a, 0)$ convient, y compris lorsque $\Delta = 0$.

8. b) Pour chercher une solution avec $b \neq 0$, la seconde équation impose $2a + u = 0$, soit $a = -u/2$. La première devient $b^2 = v - u^2/4 = -\Delta/4$. Puisque $\Delta < 0$, on peut choisir $b = \sqrt{-\Delta}/2 > 0$. Le couple $(-u/2, \sqrt{-\Delta}/2)$ convient. Tous les calculs portent sur des réels et des matrices réelles.

9. Ici $u = v = 1$, donc $\Delta = -3$. On prend $a = -1/2$, $b = \sqrt{3}/2$, d'où

$$M = -\frac{1}{2}I_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La question 7 donne $M^2 = -\frac{1}{2}I_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}A$. En additionnant M^2 , M et I_2 , les deux coefficients s'annulent, donc $M^2 + M + I_2 = 0_2$.

Partie C : Un endomorphisme bijectif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

10. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le produit AMA est une matrice du même espace. Pour M, N dans cet espace et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la distributivité donne

$$\varphi(\alpha M + \beta N) = \alpha AMA + \beta ANA = \alpha \varphi(M) + \beta \varphi(N).$$

Ainsi φ est un endomorphisme.

11. Pour toute matrice M ,

$$\varphi(\varphi(M)) = A(AMA)A = A^2MA^2 = (-I_2)M(-I_2) = M.$$

Ainsi $\varphi \circ \varphi$ est l'identité. L'application φ possède donc un inverse, qui est elle-même : $\varphi^{-1} = \varphi$. Elle est bijective.

12. a) Pour $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, le produit explicite donne $AMA = \begin{pmatrix} -s & r \\ q & -p \end{pmatrix}$. On en déduit

$\varphi(E_1) = -E_4$, $\varphi(E_2) = E_3$, $\varphi(E_3) = E_2$ et $\varphi(E_4) = -E_1$. Les coordonnées de ces images forment les colonnes de la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. b) La matrice B est réelle symétrique ; elle est donc diagonalisable par le résultat du programme. La question 11 donne $B^2 = I_4$. Toute valeur propre réelle λ vérifie donc

$$\lambda^2 = 1, \text{ soit } \lambda \in \{-1, 1\}.$$

Si B n'avait que la valeur propre 1, sa diagonalisation imposerait $B = PI_4P^{-1} = I_4$, ce qui contredit ses coefficients. Si elle n'avait que -1 , elle serait de même égale à $-I_4$, également impossible. Ainsi les deux valeurs se présentent et $\text{Sp}(B) = \{-1, 1\}$. Aucun critère supplémentaire sur les polynômes annulateurs n'est nécessaire.

- 12.** c) Pour $X = {}^t(p, q, r, s)$, on a $BX = {}^t(-s, r, q, -p)$. L'équation $BX = X$ équivaut à $s = -p$ et $r = q$. Ainsi

$$E_1(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Ces deux vecteurs sont libres, puisque l'annulation d'une combinaison linéaire impose l'annulation de ses deux premières coordonnées et donc de ses coefficients.

L'équation $BX = -X$ équivaut à $s = p$ et $r = -q$. Par conséquent

$$E_{-1}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

La même lecture des deux premières coordonnées prouve la liberté. Les deux familles affichées sont donc les bases demandées.

Exercice 3

Partie A : Simulation informatique

1. Chaque boule est équiprobable à chaque tirage. La variable X_k suit donc la loi uniforme sur $\{1, \dots, N\}$: pour j dans cet ensemble, $P(X_k = j) = 1/N$. Pour $N = 1$, il s'agit de la loi certaine en 1.
2. Le test `x in L` indique si `x` figure dans la liste. Si `x` n'y figure pas, `L.append(x)` l'ajoute à la fin ; sinon la liste reste inchangée. La liste est modifiée directement, sans création d'une nouvelle liste ni valeur de retour explicite. Si `L` ne contient pas de répétition avant l'appel, il en est de même après.
3. Tant que moins de i numéros distincts ont été observés, on réalise un tirage supplémentaire et on augmente le compteur d'une unité.

Python

```
import numpy.random as rd

def ajout(L, x):
    if (x in L) == False:
        L.append(x)

def Simul_T(N, i):
    L = []
    k = 0
    while len(L) < i:
        x = rd.randint(1, N + 1)
        ajout(L, x)
        k = k + 1
    return k
```

Après chaque passage, k est le nombre de tirages réalisés et `L` contient exactement les

numéros distincts rencontrés. La boucle s'arrête donc au premier rang où i numéros distincts sont obtenus, ce qui simule T_i . Pour $N = i = 1$, elle réalise exactement un tirage et renvoie 1. Pour chaque $i \leq N$, les chances d'obtenir un nouveau numéro sont strictement positives; la probabilité de n'en obtenir aucun pendant m essais successifs tend vers zéro. Chaque étape, puis la boucle entière, se termine donc presque sûrement.

4. Le programme complet suivant affiche une moyenne empirique de T_2 .

Python

```
import numpy.random as rd

def ajout(L, x):
    if (x in L) == False:
        L.append(x)

def Simul_T(N, i):
    L = []
    k = 0
    while len(L) < i:
        x = rd.randint(1, N + 1)
        ajout(L, x)
        k = k + 1
    return k

somme = 0
for j in range(100):
    somme = somme + Simul_T(3, 2)
print(somme / 100)
```

La sortie fournit une estimation de $E(T_2)$, et non une réalisation unique de T_2 . La loi faible des grands nombres justifie que, lorsque le nombre de simulations indépendantes augmente, la moyenne se rapproche de l'espérance au sens d'une probabilité d'écart qui tend vers zéro. Pour seulement 100 simulations, la sortie fluctue autour de $5/2$, valeur calculée ci-dessous; aucune égalité exacte n'est garantie.

Partie B : Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

5. Il faut au moins deux tirages pour obtenir deux numéros distincts, donc $T_2 \geq 2$. Tout entier $k \geq 2$ est possible : il suffit de tirer la même boule pendant $k - 1$ tirages, puis une boule différente, événement de probabilité strictement positive. Le support est donc $\{2, 3, 4, \dots\}$.
6. a) L'événement signifie que les $k - 1$ premiers tirages donnent tous 1 et que le k -ième donne une autre valeur. On a donc

$$\{T_2 = k\} \cap \{X_1 = 1\} = \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \{X_j = 1\} \right) \cap \{X_k \neq 1\}.$$

6. b) L'indépendance des tirages et l'équiprobabilité donnent

$$P(\{T_2 = k\} \cap \{X_1 = 1\}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3} = \frac{2}{3^k}.$$

6. c) Les événements $\{X_1 = 1\}$, $\{X_1 = 2\}$ et $\{X_1 = 3\}$ forment un système complet. Pour chacune des trois valeurs initiales, le calcul de la question précédente est identique. Par addition de ces probabilités disjointes,

$$P(T_2 = k) = 3 \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3^{k-1}}, \quad k \geq 2.$$

La somme de ces probabilités est

$$2 \sum_{j \geq 1} (1/3)^j = 1,$$

ce qui vérifie aussi la normalisation.

7. La variable étant positive, l'existence de l'espérance équivaut à la convergence de

$$\sum_{k \geq 2} 2k/3^{k-1}.$$

Pour $q = 1/3$, la série géométrique dérivée donne

$$\sum_{k \geq 1} kq^{k-1} = 1/(1-q)^2 = 9/4.$$

En retirant le terme $k = 1$,

$$E(T_2) = 2 \left(\frac{9}{4} - 1 \right) = \frac{5}{2}.$$

La convergence de la série utilisée établit bien l'existence avant le calcul.

8. Pour $j \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Z_2 = j) = P(T_2 = j + 1) = \frac{2}{3^j} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{j-1}.$$

Ainsi Z_2 suit la loi géométrique de paramètre $p = 2/3$ sur $\mathbb{N}^*$. Cette loi possède une espérance $1/p = 3/2$ et une variance $(1-p)/p^2 = 3/4$. Puisque $T_2 = Z_2 + 1$, on retrouve $E(T_2) = 5/2$ et $V(T_2) = 3/4$. La reconnaissance de la loi apporte ici une autre explication du calcul par série de la question 7.

Partie C : Quelques résultats dans le cas général

Décomposition de T_i

9. a) Une fois $i - 1$ numéros distincts observés, il reste $N - i + 1$ numéros nouveaux parmi les N boules. À chaque tirage suivant, tant qu'aucun nouveau numéro

n'apparaît, la probabilité de succès vaut $p_i = (N - i + 1)/N$, et celle d'échec $q_i = (i - 1)/N$.

Pour justifier le calcul malgré le rang aléatoire du début de l'attente, on peut fixer une histoire possible des tirages jusqu'à T_{i-1} . Les tirages suivants restent indépendants et uniformes. Quelle que soit cette histoire, obtenir $m - 1$ échecs puis un succès a la probabilité $q_i^{m-1}p_i$. La formule des probabilités totales sur ces histoires donne donc la même probabilité sans conditionnement. Pour tout $m \geq 1$,

$$P(Z_i = m) = \left(\frac{i-1}{N}\right)^{m-1} \frac{N-i+1}{N}.$$

Pour $2 \leq i \leq N$, on a $0 < p_i < 1$, donc c'est bien la loi géométrique de paramètre p_i .

9. b) Les moments de la loi géométrique donnent

$$E(Z_i) = \frac{N}{N-i+1}, \quad V(Z_i) = \frac{N(i-1)}{(N-i+1)^2}.$$

Pour $i = 1$, $Z_1 = 1$ avec certitude, donc son espérance vaut 1 et sa variance 0; les formules donnent exactement ces valeurs. Cette vérification inclut $N = 1$, sans utiliser une formule de loi géométrique à paramètre limite.

10. Par télescopage, pour $i \geq 2$,

$$\sum_{r=1}^i Z_r = 1 + \sum_{r=2}^i (T_r - T_{r-1}) = 1 + T_i - T_1 = T_i,$$

car $T_1 = 1$. Pour $i = 1$, la même égalité est $T_1 = Z_1 = 1$. Ainsi

$$T_i = \sum_{r=1}^i Z_r$$

pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.

Loi de T_3

Question adaptée au programme actuel : la condition $N \geq 3$ est explicitée pour que Z_3 et T_3 existent dans les notations du sujet.

11. a) Les variables Z_2 et Z_3 sont indépendantes par l'hypothèse admise de la partie C.
La question 9 donne, pour $\ell, k \geq 1$,

$$P(\{Z_2 = \ell\} \cap \{Z_3 = k\}) = \frac{N-1}{N} \left(\frac{1}{N}\right)^{\ell-1} \frac{N-2}{N} \left(\frac{2}{N}\right)^{k-1} = \frac{(N-1)(N-2)2^{k-1}}{N^{\ell+k}}.$$

11. b) Pour $n \geq 2$, l'événement $\{Z_2 + Z_3 = n\}$ est la réunion disjointe des événements $\{Z_2 = \ell, Z_3 = n - \ell\}$ pour $\ell = 1, \dots, n-1$. Il s'agit d'une somme finie, calculée directement :

$$P(Z_2 + Z_3 = n) = \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} \sum_{\ell=1}^{n-1} 2^{n-\ell-1}.$$

En posant $r = n - \ell - 1$, la somme devient

$$\sum_{r=0}^{n-2} 2^r = 2^{n-1} - 1.$$

On obtient

$$P(Z_2 + Z_3 = n) = \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} (2^{n-1} - 1) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n} \right).$$

Aucune formule générale sur des densités ou des sommes de lois n'intervient.

11. c) Comme $Z_1 = 1$, la question 10 donne $T_3 = 1 + Z_2 + Z_3$. Son support est $\{3, 4, 5, \dots\}$ et, pour tout entier $m \geq 3$,

$$P(T_3 = m) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N} \right)^{m-1} - \frac{2}{N^{m-1}} \right).$$

Pour les autres entiers, la probabilité est nulle. Lorsque $N \geq 3$, les deux raisons $2/N$ et $1/N$ appartiennent à $]0, 1[$; les séries géométriques montrent que la somme des probabilités affichées vaut 1, en accord avec la décomposition obtenue.

Espérance et covariance

12. Chaque Z_r admet une espérance finie. La somme finie

$$T_i = \sum_{r=1}^i Z_r$$

admet donc une espérance et, par linéarité,

$$E(T_i) = \sum_{r=1}^i \frac{N}{N-r+1} = N \sum_{k=N-i+1}^N \frac{1}{k}.$$

Le changement d'indice est $k = N - r + 1$; il parcourt les entiers de N à $N - i + 1$ dans l'ordre inverse. Pour $N = i = 1$, la formule donne bien 1.

13. Tous les Z_r admettent une variance finie, donc les sommes finies T_i et T_j aussi; leur covariance est définie.

Méthode 1 — Décomposer T_j

Pour $i < j$, posons

$$R = \sum_{r=i+1}^j Z_r.$$

Le lemme des coalitions et l'indépendance admise des Z_r montrent que

$$T_i = \sum_{r=1}^i Z_r$$

et R sont indépendantes. Comme $T_j = T_i + R$, la bilinéarité donne

$$\text{Cov}(T_i, T_j) = \text{Cov}(T_i, T_i) + \text{Cov}(T_i, R) = V(T_i).$$

Pour $i = j$, l'égalité est la définition de la variance comme covariance d'une variable avec elle-même.

Méthode 2 — Développer la double somme finie

La bilinéarité donne

$$\text{Cov}(T_i, T_j) = \sum_{r=1}^i \sum_{s=1}^j \text{Cov}(Z_r, Z_s).$$

Pour $r \neq s$, l'indépendance annule la covariance ; pour $r = s$, elle vaut $V(Z_r)$. Comme $i \leq j$, il reste

$$\sum_{r=1}^i V(Z_r),$$

qui est $V(T_i)$ par indépendance. La première méthode met en évidence la partie commune des deux temps ; la seconde montre précisément quels termes contribuent à leur covariance.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 9 : indication de regroupement en paquets ajoutée pour prouver directement la divergence ; les compléments généraux sur les séries de référence sont limités dans l'annexe officielle au cadre des variables aléatoires discrètes.

Exercice 1, question 3 : documentation de `plt.title`, `plt.plot` et `plt.show` ajoutée. La figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées pour le cadre et les graduations ; les coordonnées de la trajectoire sont calculées à partir de la solution exacte et des 200 valeurs du code.

Exercice 3, préambule et question 1 : caractère indépendant et équiprobable des tirages explicité, conformément au modèle usuel des tirages avec remise utilisé par toutes les questions probabilistes.

Exercice 3, question 3 : syntaxe et bornes de `rd.randint` documentées, sans modification de l'algorithme demandé.

Exercice 3, question 11 : condition $N \geq 3$ ajoutée pour rendre définies les variables T_3 et Z_3 ; aucune question n'est supprimée.
