



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques — Mathématiques appliquées

2023

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Études de fonctions et de suites

Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

1. a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$; on dressera son tableau de variations, en précisant les limites.
1. b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.
2. Informatique.

La fonction `numpy.exp` calcule l'exponentielle de son argument. Dans les fonctions suivantes, le paramètre `a` est un réel strictement positif.

2. a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

Python

```
def fonc_1(a):  
    from numpy import exp  
    u = 1  
    n = 0  
    while ...:  
        u = exp(-u) / u  
        n = ...  
    return n
```

2. b) On considère maintenant la fonction Python :

Python

```
def fonc_2(a):  
    from numpy import exp  
    u = 1  
    n = 0  
    while u >= a:  
        u = exp(-u) / u  
        n = n + 1  
    return n
```

Les appels suivants donnent respectivement 6 et 5 :

Python

```
fonc_1(10**6)  
fonc_2(10**(-6))
```

Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ? Commenter ce résultat en une ligne.

2. c) Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de u_n .
3. Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose $g(x) = e^{-x} - x^2$.
3. a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $] -\infty, 1]$.
3. b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$, que l'on notera α .
3. c) Justifier que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. On rappelle que $e \simeq 2,7$.
4. a) Démontrer que l'on a $u_2 > u_0$.

4. b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
4. c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
5. Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.
 5. a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.
 5. b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
 5. c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions sur $[0, +\infty[$, qui sont 0 et α , où α est le réel introduit à la question 3. b).
 5. d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
6. La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle majorée? Admet-elle une limite?

Exercice 2

Deux systèmes différentiels

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie I - Réduction de la matrice A

Dans cette partie, I désigne la matrice identité d'ordre 3.

1. a) Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?

1. b) Justifier que 2 est valeur propre de la matrice A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.

1. c) Donner une base de E_2 .

1. d) Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?

2. a) Dans cette sous-question, M est une matrice dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Que représentent les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?

2. b) En déduire la dernière valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.

3. Donner une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$. On ne demande pas de préciser la matrice P^{-1} .

Partie II - Un système différentiel

On considère le système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} x' = 3x + y + z, \\ y' = x + 3y + z, \\ z' = x + y + 3z, \end{cases}$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre le système différentiel (S) .
5. a) Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution

$$X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$$

du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

5. b) Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

Partie III - Un second système différentiel

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer les valeurs propres de B .
7. La matrice B est-elle diagonalisable ?
8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B soit la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.
 8. a) Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

8. b) Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?

8. c) Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

9. En déduire la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x' = -x - 4y, \\ y' = x + 3y, \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Pour cela, poser

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

et obtenir les deux équations scalaires vérifiées par u et v . Résoudre d'abord l'équation vérifiée par v , puis celle vérifiée par u en cherchant une solution particulière sous la forme $u(t) = kte^t$, où k est une constante à déterminer.

Exercice 3

L'entropie en probabilité

L'objet de cet exercice est d'introduire la notion d'entropie qui mesure l'incertitude sur la valeur prise par une variable aléatoire donnée.

Notation

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $\llbracket 1, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et n :

$$\llbracket 1, n \rrbracket = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

Les parties II et III sont indépendantes, mais utilisent des résultats de la partie I.

Partie I - Préliminaire

1. Soit $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. a) Démontrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

1. b) La fonction h est-elle dérivable en 0 ?

1. c) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction h .

2. Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose $g(x) = -h(x) - h(1 - x)$.

Dresser le tableau de variations de la fonction g .

Partie II - Des variables aléatoires discrètes

Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, l'entropie de X est, sous réserve d'existence :

$$H(X) = - \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X = x)).$$

En particulier, lorsque X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, l'entropie

de X existe toujours et vaut

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n h(p_i),$$

où, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i = P(X = x_i)$.

3. Dans cette question, U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer $H(U)$.
4. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Démontrer que $H(X) \leq \ln 2$, avec égalité si et seulement si $p = \frac{1}{2}$. On pourra utiliser la question 2.
5. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2 , définies sur le même espace probabilisé.

Soit Z la variable aléatoire telle que $Z(\Omega) = \{0, 1\}$ et l'événement $[Z = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « $X_1 + X_2$ est impair » est réalisé.

On définit le réel p par $p = P(Z = 1)$.

5. a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X_1 + X_2$?
5. b) Démontrer que $p = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)$.
5. c) Vérifier que $1 - 2p = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2)$.
6. Soit $p \in]0, 1[$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

et on considère la variable aléatoire Z_n telle que $Z_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et l'événement $[Z_n = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « S_n est impair » est réalisé.

6. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la variable aléatoire S_n ?
6. b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n$. On pourra raisonner par récurrence.
6. c) Démontrer que $H(Z_n) \leq \ln 2$. Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Partie III - Des variables à densité

Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f , on dit que X admet une entropie lorsque l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) dt$ converge absolument; l'entropie de X est alors

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) dt.$$

7. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$, où a et b sont des réels tels que $a < b$.
 7. a) Démontrer que U admet une entropie.
 7. b) Déterminer $H(U)$.
8. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité f .

8. a) Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ et déterminer sa valeur.
8. b) Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = 1 - \ln \lambda$.
9. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On note ϕ la densité usuelle de la variable aléatoire X .
9. a) Donner l'espérance et la variance de X . En déduire la valeur de l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t) dt$.
9. b) Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = \frac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}$.