



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques — Mathématiques appliquées

2023

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Études de fonctions et de suites

1. a) Sur $]0, +\infty[$, la fonction f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2} < 0.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 0 par valeurs positives, donc $f(x) \rightarrow +\infty$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $0 < f(x) \leq e^{-x}$ pour $x \geq 1$, donc $f(x) \rightarrow 0$.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

x	0^+		$+\infty$
$f'(x)$		—	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

1. b) Procédons par récurrence. Le terme $u_0 = 1$ est défini et strictement positif. Si u_n est défini et strictement positif, alors $e^{-u_n} > 0$ et le quotient e^{-u_n}/u_n est défini et strictement positif. C'est précisément u_{n+1} .

Par récurrence, tous les termes existent et sont strictement positifs.

2. a) Question adaptée au programme actuel : le domaine $a > 0$ et le rôle de `numpy.exp` ont été précisés dans le sujet.

À chaque début de boucle, u contient u_n . On poursuit tant que la propriété $u_n > a$ est fausse, donc tant que $u_n \leq a$. Après le calcul du terme suivant, on incrémente le rang de 1.

Python

```
def fonc_1(a):  
    from numpy import exp  
    u = 1  
    n = 0  
    while u <= a:  
        u = exp(-u) / u  
        n = n + 1  
    return n
```

Si la boucle se termine, le rang renvoyé est le premier rang où $u_n > a$, puisque tous les rangs précédents ont été testés. La question 6 établira que les termes de rang pair tendent vers $+\infty$, ce qui garantit l'existence d'un tel rang pour tout $a > 0$ en arithmétique réelle exacte. Pour des seuils extrêmes, l'arithmétique flottante peut rencontrer ses limites ; cette remarque ne modifie pas l'algorithme mathématique.

2. b) Question adaptée au programme actuel : rectification d'une erreur du code de l'énoncé. Le test `while u < a` imprimé dans le sujet source est incompatible avec le résultat annoncé pour le seuil $a = 10^{-6}$: avec $u = 1$, la boucle ne serait jamais exécutée. Le test corrigé est `while u >= a`, qui cherche le premier rang où $u_n < a$.

Python

```
def fonc_2(a):  
    from numpy import exp  
    u = 1  
    n = 0  
    while u >= a:  
        u = exp(-u) / u  
        n = n + 1  
    return n
```

Les deux sorties annoncées donnent

$$0 < u_5 < 10^{-6} \quad \text{et} \quad u_6 > 10^6.$$

Elles indiquent également que $u_k \geq 10^{-6}$ pour $0 \leq k \leq 4$ et que $u_k \leq 10^6$ pour $0 \leq k \leq 5$.

Commentaire : deux termes consécutifs peuvent être respectivement très proches de 0 et très grands, ce qui suggère des comportements différents suivant la parité du rang.

2. c) On effectue exactement n transitions à partir de $u_0 = 1$.

Python

```
def terme(n):
    from numpy import exp
    u = 1
    for k in range(n):
        u = exp(-u) / u
    return u
```

La boucle `range(n)` effectue n passages. Après k passages, u vaut u_k ; à la fin, la fonction renvoie donc u_n . Pour $n = 0$, la boucle est vide et renvoie correctement 1.

3. a) La fonction g est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$, avec

$$g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0.$$

Elle est donc strictement décroissante. De plus, $g(0) = 1$ et $g(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, puisque $e^{-x} \rightarrow 0$ et $x^2 \rightarrow +\infty$. Le théorème de la bijection pour une fonction continue strictement monotone montre que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $] -\infty, 1]$.

3. b) Pour $x > 0$, multiplier par x est licite et donne

$$f(x) = x \iff e^{-x} = x^2 \iff g(x) = 0.$$

Puisque $0 \in] -\infty, 1]$, la question précédente assure l'existence d'un unique antécédent de 0. Il n'est pas nul, car $g(0) = 1$. Ainsi, l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution $\alpha > 0$.

3. c) On a $g(1) = e^{-1} - 1 < 0$. Comme $0 < 1/e < 1$, on a $e^{-1/e} > e^{-1}$, d'où

$$g(1/e) = e^{-1/e} - e^{-2} > e^{-1} - e^{-2} > 0.$$

La stricte décroissance de g et l'égalité $g(\alpha) = 0$ entraînent $1/e < \alpha < 1$.

4. a) Les premiers termes sont $u_1 = e^{-1}$ et

$$u_2 = \frac{e^{-1/e}}{1/e} = e^{1-1/e}.$$

Comme $e > 1$, l'exposant $1 - 1/e$ est positif. Par conséquent, $u_2 > 1 = u_0$.

4. b) Méthode 1 — Double renversement des inégalités

On part de $u_2 > u_0$. Si $u_{2n+2} > u_{2n}$, la stricte décroissance de f donne d'abord

$u_{2n+3} < u_{2n+1}$, puis $u_{2n+4} > u_{2n+2}$. Une récurrence entraîne donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+2} > u_{2n}.$$

La suite des termes de rang pair est strictement croissante.

Méthode 2 — Itération d'une fonction croissante

La composée $f \circ f$ est strictement croissante : si $0 < x < y$, alors $f(x) > f(y)$, puis $f(f(x)) < f(f(y))$. En posant $v_n = u_{2n}$, on obtient $v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$. Comme $v_1 > v_0$, la croissance de $f \circ f$ propage cette inégalité par récurrence. On retrouve $v_{n+1} > v_n$ pour tout n .

La première approche suit directement les rangs de la suite ; la seconde regroupe deux itérations en une seule fonction croissante.

4. c) Puisque $u_{2n+2} > u_{2n}$ et que f est strictement décroissante, on a $u_{2n+3} < u_{2n+1}$. La suite (u_{2n+1}) est donc strictement décroissante. Tous ses termes sont positifs par 1.

b), elle est donc minorée par 0. Le théorème de convergence des suites monotones donne une limite réelle ℓ telle que

$$0 \leq \ell \leq u_1 = 1/e.$$

5. a) Pour $x > 0$, $f(x) > 0$, et

$$h(x) = \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} = x e^x e^{-e^{-x}/x} = x \exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right).$$

5. b) Sur $]0, +\infty[$, la continuité de $h = f \circ f$ résulte de celle de f et du fait que $f(x) > 0$.

À droite de 0, l'expression précédente donne

$$0 < h(x) = xe^x e^{-f(x)} \leq xe^x,$$

car $f(x) > 0$ implique $0 < e^{-f(x)} < 1$. Comme $xe^x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, l'encadrement donne $h(x) \rightarrow 0 = h(0)$. Ainsi, h est continue sur $[0, +\infty[$.

5. c) Le nombre 0 est solution par définition de $h(0)$. Pour $x > 0$, on peut diviser par x et utiliser l'injectivité de l'exponentielle :

$$h(x) = x \iff \exp(x - f(x)) = 1 \iff x - f(x) = 0 \iff f(x) = x.$$

D'après 3. b), cette dernière équation a pour seule solution positive α . Les deux solutions sur $[0, +\infty[$ sont donc exactement 0 et α .

5. d) La relation $u_{2n+3} = h(u_{2n+1})$ et la continuité de h au réel $\ell \geq 0$ permettent de passer à la limite : $\ell = h(\ell)$. Ainsi, $\ell \in \{0, \alpha\}$. Or $\ell \leq 1/e < \alpha$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0.$$

6. Méthode 1 — Contradiction avec les points fixes

Supposons la suite (u_{2n}) majorée. Elle est croissante par 4. b), donc elle converge vers un réel $L \geq u_0 = 1$. La relation $u_{2n+2} = h(u_{2n})$ et la continuité de h donnent $L = h(L)$. Par 5. c), L vaut 0 ou α , ce qui contredit $L \geq 1 > \alpha$.

La suite (u_{2n}) n'est donc pas majorée. Étant croissante, elle tend vers $+\infty$: pour tout réel M , un terme dépasse M , puis tous les termes suivants le dépassent.

Méthode 2 — Utilisation de la limite des termes impairs

Pour $n \geq 1$, on a $u_{2n} = f(u_{2n-1})$. La question 5. d) donne $u_{2n-1} \rightarrow 0^+$ et la question 1. a) donne $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Par composition de ces limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty.$$

Cette seconde méthode fournit directement la limite à partir de celle des termes impairs. Dans les deux méthodes, la suite n'a pas de limite réelle finie, mais admet la limite infinie $+\infty$.

Exercice 2

Deux systèmes différentiels

Partie I - Réduction de la matrice A

1. a) La matrice $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a trois colonnes identiques et non nulles. Son

image est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Son rang est donc 1.

1. b) Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(A - 2I) = 3 - 1 = 2$. Ce noyau contient donc des vecteurs non nuls, ce qui signifie que 2 est valeur propre de A . Le sous-espace propre $E_2 = \text{Ker}(A - 2I)$ est de dimension 2.

1. c) Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, l'équation $(A - 2I)X = 0$ équivaut à $x + y + z = 0$. Tout vecteur

de E_2 s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $w_1 = (-1, 1, 0)$ et $w_2 = (-1, 0, 1)$ sont libres : dans $aw_1 + bw_2 = 0$, la deuxième coordonnée impose $a = 0$ et la troisième $b = 0$. Ils forment donc une base de E_2 .

1. d) Les familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes se réunissent en une famille libre. Puisque E_2 est déjà de dimension 2 et que l'espace ambiant est de dimension 3, il peut y avoir au plus une autre valeur propre.

Il y en a en fait exactement une : A est symétrique réelle, donc diagonalisable. Si sa seule valeur propre était 2, une diagonalisation donnerait $A = P(2I)P^{-1} = 2I$, contrairement aux coefficients de A . La question suivante identifie cette autre valeur propre.

2. a) Si $M = (m_{ij})$, la coordonnée de rang i de MU vaut $m_{i1} + m_{i2} + m_{i3}$. Les coordonnées de MU sont donc les sommes des coefficients des lignes de M .
2. b) Chaque ligne de A a pour somme 5. Ainsi, $AU = 5U$, avec $U \neq 0$, donc 5 est valeur propre de A . D'après 1. d), il n'y a pas d'autre valeur propre distincte de 2 et 5.

Le sous-espace E_5 contient U ; sa dimension est au moins 1. Comme $\dim E_2 = 2$ et que les sous-espaces associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe, $\dim E_5 \leq 1$. Donc $E_5 = \text{Vect}(U)$, et (U) en est une base.

3. Les deux vecteurs w_1, w_2 de 1. c), suivis de U , forment une base de vecteurs propres. En effet, les deux premiers forment une base de E_2 et le troisième une base de E_5 , les valeurs propres étant distinctes.

On peut donc choisir

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice P est inversible puisque ses colonnes forment une base. Les égalités $Aw_1 = 2w_1$, $Aw_2 = 2w_2$ et $AU = 5U$ donnent $AP = PD$, puis $A = PDP^{-1}$.

Partie II - Un système différentiel

4. Méthode 1 — Diagonalisation

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X = PY$. La matrice P est constante et inversible, donc

$$X' = AX \iff PY' = APY \iff Y' = DY.$$

Les trois équations scalaires sont $Y_1' = 2Y_1$, $Y_2' = 2Y_2$ et $Y_3' = 5Y_3$. Leurs solutions sur $\mathbb{R}$ sont $Y_1(t) = ae^{2t}$, $Y_2(t) = be^{2t}$ et $Y_3(t) = ce^{5t}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont arbitraires.

Toutes les solutions sont donc

$$X(t) = ae^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + be^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + ce^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

soit

$$\begin{cases} x(t) = -(a+b)e^{2t} + ce^{5t}, \\ y(t) = ae^{2t} + ce^{5t}, \\ z(t) = be^{2t} + ce^{5t}. \end{cases}$$

Les transformations étant réversibles, cette expression fournit toutes les solutions et uniquement des solutions.

Méthode 2 — Somme et différences des coordonnées

Pour toute solution, posons $s = x + y + z$, $d = x - y$ et $r = x - z$. En additionnant ou en soustrayant les équations, on obtient $s' = 5s$, $d' = 2d$ et $r' = 2r$. Donc $s = Ce^{5t}$, $d = De^{2t}$ et $r = Re^{2t}$.

Comme $y = x - d$ et $z = x - r$, on a $s = 3x - d - r$. Par conséquent,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{C}{3}e^{5t} + \frac{D+R}{3}e^{2t}, \\ y(t) = \frac{C}{3}e^{5t} + \frac{R-2D}{3}e^{2t}, \\ z(t) = \frac{C}{3}e^{5t} + \frac{D-2R}{3}e^{2t}. \end{cases}$$

Réciproquement, ces expressions satisfont le système par dérivation. On retrouve la même famille de solutions. Cette méthode exploite la symétrie du système, tandis que la première réutilise directement la réduction de A .

5. a) Le théorème d'existence et d'unicité du problème de Cauchy pour un système linéaire $X' = AX$ à matrice constante, admis au programme, assure qu'à toute valeur initiale $X(0) \in \mathbb{R}^3$ correspond une unique solution sur $\mathbb{R}$. Il s'applique ici puisque A est une matrice réelle constante.

5. b) Le vecteur initial $W = (1, -1, 0)$ appartient à E_2 , puisque ses coordonnées ont pour somme 0. Ainsi,

$$X_0(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, $X'_0 = 2e^{2t}W = e^{2t}AW = AX_0$ et $X_0(0) = W$. L'unicité établie en 5. a) prouve qu'il s'agit de la solution cherchée. Dans la formule de 4, elle correspond à $a = -1$, $b = 0$ et $c = 0$.

Partie III - Un second système différentiel

6. Posons $N = B - I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Un produit direct donne

$$N^2 = \begin{pmatrix} 4 - 4 & 8 - 8 \\ -2 + 2 & -4 + 4 \end{pmatrix} = 0.$$

Si $BX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $NX = (\lambda - 1)X$, puis $0 = N^2X = (\lambda - 1)^2X$. Comme $X \neq 0$, cela impose $\lambda = 1$.

Inversement,

$$B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

donc 1 est bien valeur propre. La seule valeur propre de B est 1 ; aucun calcul de déterminant n'est nécessaire.

7. L'équation $(B - I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ équivaut à $x + 2y = 0$. Ainsi,

$$E_1 = \text{Vect}((2, -1)).$$

Ce sous-espace est de dimension 1. Puisque 1 est la seule valeur propre, tous les vecteurs propres appartiennent à cette droite : il est impossible de former une base de $\mathbb{R}^2$ avec des vecteurs propres. La matrice B n'est donc pas diagonalisable.

8. a) Si $av_1 + bv_2 = 0$, les coordonnées donnent $2a - b = 0$ et $-a = 0$. On en déduit $a = 0$, puis $b = 0$. La famille (v_1, v_2) est libre et comporte deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$; elle en est donc une base.

8. b) Les calculs dans la base canonique donnent

$$f(v_1) = B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1,$$

$$f(v_2) = B \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1 + v_2.$$

Les colonnes de la matrice dans β sont les coordonnées de ces images dans β . Par conséquent,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. c) Prenons la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de β exprimés dans la base canonique :

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible par 8. a). Les relations de 8. b) donnent $BQ = QT$, d'où $B = QTQ^{-1}$. Cette égalité est un changement de base concret et n'utilise aucun résultat général de réduction supplémentaire.

9. Question adaptée au programme actuel : le guidage ajouté ramène ce cas concret non diagonalisable à des équations scalaires du premier ordre, sans supposer connue une méthode générale de résolution des systèmes non diagonalisables.

Posons

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Comme Q est constante et inversible, $X' = BX$ équivaut à

$$\begin{cases} u' = u + v, \\ v' = v. \end{cases}$$

La seconde équation donne $v(t) = be^t$ pour une constante $b \in \mathbb{R}$. La première devient $u' - u = be^t$. Pour la solution particulière indiquée $u_p(t) = kte^t$, on calcule

$$u'_p(t) - u_p(t) = ke^t.$$

Il suffit donc de choisir $k = b$. Toutes les solutions de l'équation scalaire sont $u(t) = (a + bt)e^t$, avec $a \in \mathbb{R}$, puisque l'équation homogène $u' - u = 0$ a pour solutions ae^t .

En revenant aux coordonnées initiales $x = 2u - v$ et $y = -u$, on obtient toutes les solutions :

$$\begin{cases} x(t) = (2a + 2bt - b)e^t, \\ y(t) = -(a + bt)e^t, \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

La chaîne d'équivalences prouve l'exhaustivité. On peut aussi vérifier directement :

$$x' = (2a + 2bt + b)e^t = -x - 4y \text{ et } y' = -(a + bt + b)e^t = x + 3y.$$

Exercice 3

L'entropie en probabilité

Partie I - Préliminaire

1. a) Sur $]0, +\infty[$, la fonction $h(x) = x \ln x$ est continue comme produit de fonctions continues. À droite de 0, les croissances comparées donnent $x \ln x \rightarrow 0 = h(0)$.

Pour expliciter cette limite, posons simplement $y = 1/x$. Alors $y \rightarrow +\infty$ et $x \ln x = -(\ln y)/y \rightarrow 0$. Ainsi, h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

1. b) Le taux d'accroissement à droite de 0 est

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \ln x \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow 0^+).$$

Il n'a pas de limite réelle finie. La fonction h n'est donc pas dérivable à droite en 0, et n'est pas dérivable en 0 sur son domaine.

1. c) Par définition, $h(0) = 0$. Pour $x > 0$, on a $x \ln x = 0$ si et seulement si $\ln x = 0$, donc si et seulement si $x = 1$. Les antécédents de 0 sont exactement 0 et 1.

2. La fonction g est continue sur $[0, 1]$ par continuité de h . Sur $]0, 1[$, elle est dérivable et

$$g'(x) = -(\ln x + 1) + (\ln(1 - x) + 1) = \ln\left(\frac{1 - x}{x}\right).$$

Ainsi, $g'(x) > 0$ pour $0 < x < 1/2$, $g'(1/2) = 0$ et $g'(x) < 0$ pour $1/2 < x < 1$. Enfin,

$$g(0) = g(1) = 0, \quad g(1/2) = -2 \times \frac{1}{2} \ln(1/2) = \ln 2.$$

x	0		$1/2$		1
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0

Le maximum de g sur $[0, 1]$ est donc $\ln 2$, atteint uniquement en $1/2$.

Partie II - Des variables aléatoires discrètes

3. La variable U prend les n valeurs de $\llbracket 1, n \rrbracket$ avec probabilité $1/n$. La somme définissant son entropie est finie, et

$$H(U) = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln(1/n) = - \ln(1/n) = \ln n.$$

La formule vaut aussi pour $n = 1$, auquel cas U est constante et son entropie est nulle.

4. Méthode 1 — Étude de la fonction de la partie I

La loi de Bernoulli donne $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$. Ainsi,

$$H(X) = -p \ln p - (1 - p) \ln(1 - p) = g(p).$$

La question 2 entraîne $H(X) \leq \ln 2$, avec égalité exactement lorsque $p = 1/2$.

Méthode 2 — Inégalité élémentaire du logarithme

Pour $t > 0$, on a $\ln t \leq t - 1$, avec égalité uniquement pour $t = 1$. En effet, la fonction $t \mapsto t - 1 - \ln t$ a pour dérivée $(t - 1)/t$ et admet son minimum nul en 1.

Puisque p et $1 - p$ sont strictement positifs,

$$H(X) - \ln 2 = p \ln\left(\frac{1}{2p}\right) + (1-p) \ln\left(\frac{1}{2(1-p)}\right).$$

L'inégalité précédente appliquée à chacun des logarithmes donne

$$H(X) - \ln 2 \leq p \left(\frac{1}{2p} - 1 \right) + (1-p) \left(\frac{1}{2(1-p)} - 1 \right) = 0.$$

Comme les deux poids sont strictement positifs, l'égalité nécessite que les deux arguments des logarithmes valent 1, donc $p = 1/2$; réciproquement, ce paramètre donne l'égalité. Cette approche fournit une preuve directe, tandis que la première réutilise le tableau de variations.

5. a) Chacune des variables vaut 0 ou 1. Leur somme prend donc ses valeurs parmi 0, 1 et 2. Lorsque les paramètres sont strictement compris entre 0 et 1, ces trois valeurs ont toutes une probabilité strictement positive.

5. b) La somme est impaire exactement lorsqu'elle vaut 1, c'est-à-dire sur la réunion disjointe des événements $[X_1 = 1, X_2 = 0]$ et $[X_1 = 0, X_2 = 1]$. L'indépendance donne donc

$$p = P(Z = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1),$$

$$\text{soit } p = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1).$$

5. c) En développant la formule de 5. b), $p = p_1 + p_2 - 2p_1p_2$. Par conséquent,

$$1 - 2p = 1 - 2p_1 - 2p_2 + 4p_1p_2 = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2).$$

6. a) La variable S_n est la somme de n variables de Bernoulli mutuellement indépendantes de même paramètre p . Elle suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

6. b) Méthode 1 — Récurrence sur la parité

Posons $q_n = P(Z_n = 1)$. Pour $n = 1$, on a $Z_1 = X_1$, donc $q_1 = p$ et $1 - 2q_1 = 1 - 2p$.

Supposons $1 - 2q_n = (1 - 2p)^n$. La variable Z_n est une fonction de $X_1, \dots, X_n$. Par indépendance mutuelle et lemme des coalitions, Z_n est indépendante de X_{n+1} .

La somme $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ est impaire exactement lorsque $Z_n + X_{n+1}$ est impair. La formule de la question 5. c), appliquée aux Bernoulli Z_n et X_{n+1} , donne

$$1 - 2q_{n+1} = (1 - 2q_n)(1 - 2p) = (1 - 2p)^{n+1}.$$

Par récurrence, l'égalité demandée est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Méthode 2 — Binôme et séparation des rangs pairs et impairs

D'après la loi de S_n et la formule du binôme,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k P(S_n = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = ((1-p) - p)^n = (1-2p)^n.$$

La somme de gauche est la probabilité que S_n soit pair moins celle qu'il soit impair. Ces deux probabilités ont pour somme 1 ; leur différence vaut donc $1 - 2P(Z_n = 1)$. On obtient à nouveau l'égalité souhaitée. La récurrence décrit l'ajout d'une Bernoulli ; le binôme utilise directement la loi de la somme.

6. c) On a

$$q_n = \frac{1 - (1 - 2p)^n}{2}.$$

Comme $p \in]0, 1[$, on a $|1 - 2p| < 1$, donc $q_n \in]0, 1[$ pour tout $n \geq 1$. La variable Z_n est une Bernoulli de paramètre q_n . La question 4 donne $H(Z_n) \leq \ln 2$, avec égalité si et seulement si $q_n = 1/2$.

Or $q_n = 1/2$ équivaut à $(1 - 2p)^n = 0$, donc à $p = 1/2$, puisque $n \geq 1$. Pour chaque entier $n \geq 1$, l'égalité a donc lieu exactement pour $p = 1/2$.

Partie III - Des variables à densité

7. a) On peut prendre pour densité de U la fonction $f(t) = 1/(b - a)$ sur $[a, b]$ et 0 en dehors de cet intervalle. Puisque $h(0) = 0$, la fonction $h \circ f$ est nulle hors de $[a, b]$ et constante sur cet intervalle. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(f(t))| dt = (b - a) \left| \frac{1}{b - a} \ln \left(\frac{1}{b - a} \right) \right| = |\ln(b - a)| < +\infty.$$

L'intégrale converge absolument, donc U admet une entropie. Les valeurs d'une densité aux extrémités a et b ne modifient pas ces intégrales.

7. b) En utilisant la même densité,

$$H(U) = -(b - a) \frac{1}{b - a} \ln \left(\frac{1}{b - a} \right) = \ln(b - a).$$

Cette entropie de variable à densité peut être négative, par exemple lorsque $b - a < 1$; cela ne contredit aucune des propriétés établies pour l'entropie discrète.

8. a) Méthode 1 — Espérance d'une exponentielle

Une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ admet une espérance égale à $1/\lambda$. Par la définition de l'espérance pour une variable à densité, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ converge absolument et vaut $1/\lambda$.

Méthode 2 — Intégration par parties sur un segment

La densité usuelle est $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$ et 0 pour $t < 0$. Pour $R > 0$, une

intégration par parties sur $[0, R]$ donne

$$\int_0^R t \lambda e^{-\lambda t} dt = [-te^{-\lambda t}]_0^R + \int_0^R e^{-\lambda t} dt = -Re^{-\lambda R} + \frac{1 - e^{-\lambda R}}{\lambda}.$$

Les croissances comparées donnent $Re^{-\lambda R} \rightarrow 0$ et $e^{-\lambda R} \rightarrow 0$ lorsque $R \rightarrow +\infty$.

L'intégrale impropre converge donc et vaut $1/\lambda$. Son intégrande étant positive, la convergence est aussi absolue. Cette méthode retrouve par calcul la valeur de l'espérance utilisée dans la première.

8. b) Pour $t \geq 0$, la densité est strictement positive et

$$h(f(t)) = f(t) \ln f(t) = f(t)(\ln \lambda - \lambda t).$$

Pour $t < 0$, elle est nulle, donc $h(f(t)) = h(0) = 0$. Pour vérifier la convergence absolue, on utilise

$$|h(f(t))| \leq |\ln \lambda| f(t) + \lambda t f(t) \quad (t \geq 0).$$

La première fonction du membre de droite est intégrable puisque $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$. La seconde l'est par 8. a). L'intégrale définissant l'entropie converge donc absolument.

On peut alors utiliser la linéarité :

$$H(X) = -(\ln \lambda) \int_0^{+\infty} f(t) dt + \lambda \int_0^{+\infty} t f(t) dt = -\ln \lambda + \lambda \frac{1}{\lambda} = 1 - \ln \lambda.$$

9. a) Pour la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on a $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$. Ces moments existent. Par la formule de Koenig-Huygens,

$$E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \sigma^2 + m^2.$$

Le théorème de transfert, appliqué à $t \mapsto t^2$, donne donc la convergence de l'intégrale positive et sa valeur :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t) dt = \sigma^2 + m^2.$$

9. b) La densité usuelle, strictement positive sur $\mathbb{R}$, est

$$\phi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Comme $\sigma > 0$, tous les termes sont définis, et

$$\ln \phi(t) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}.$$

On sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 1$ et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-m)^2 \phi(t) dt = E((X-m)^2) = \sigma^2.$$

Cette dernière intégrale converge puisque X admet une variance. Pour établir l'existence de l'entropie avant de la calculer, on majore

$$|h(\phi(t))| = |\phi(t) \ln \phi(t)| \leq \frac{|\ln(2\pi\sigma^2)|}{2} \phi(t) + \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} \phi(t).$$

Les deux termes du membre de droite sont intégrables sur $\mathbb{R}$, d'après les deux intégrales précédentes. L'intégrale de $h \circ \phi$ converge donc absolument. En intégrant l'expression de $-\phi \ln \phi$, on obtient

$$H(X) = \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \times 1 + \frac{1}{2\sigma^2} \times \sigma^2 = \frac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}.$$

La translation m n'intervient pas dans le résultat; le calcul n'a utilisé que la normalisation de la densité et sa variance.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 2 : précision du domaine $a > 0$ et rappel du rôle de `numpy.exp`, afin de rendre les consignes informatiques autonomes.

Exercice 1, question 2. b) : remplacement du test `while u < a` par `while u >= a`. Le test imprimé dans le sujet source renvoyait immédiatement 0 pour le seuil 10^{-6} , contrairement à la sortie 5 annoncée. La rectification préserve l'objectif de comparaison des termes u_5 et u_6 .

Exercice 2, question 9 : ajout d'un guidage par le changement de coordonnées déjà calculé en 8, puis par deux équations scalaires du premier ordre. Ce cas non diagonalisable est ainsi traité avec les outils scalaires du programme, sans supposer connue une méthode générale de résolution des systèmes non diagonalisables.