



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques — Option économique

2022

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie A

1. La variable $Y = X + 1$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $m \geq 1$,

$$P(Y = m) = P(X = m - 1) = q^{m-1}p = (1 - p)^{m-1}p.$$

Comme $p \in]0, 1[$, c'est la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^* : Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

2. La variable géométrique Y possède une espérance et une variance, données par $E(Y) = 1/p$ et $V(Y) = q/p^2$. Puisque $X = Y - 1$, les règles de transformation affine donnent

$$E(X) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}, \quad V(X) = V(Y) = \frac{q}{p^2}.$$

Les moments existent parce que ceux de Y existent ; aucune série divergente n'est donc manipulée.

3. Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

On simule des épreuves indépendantes, chacune ayant une probabilité p de succès. Le compteur Y , initialement égal à 1, augmente à chaque échec. Le premier succès arrête la boucle : Y est son rang et $X = Y - 1$ compte les échecs qui l'ont précédé.

Python

```
import numpy.random as rd

def simule_X(p):
    Y = 1
    while rd.random() > p:
        Y = Y + 1
    X = Y - 1
    return X
```

Chaque test utilise un nouvel appel indépendant. Pour obtenir $X = k$, il faut k échecs

puis un succès, événement de probabilité $q^k p$. La probabilité de ne jamais s'arrêter est $\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0$. Le seuil pourrait être inclus de l'autre côté sans changer la loi puisque la loi uniforme ne charge pas un point.

Partie B

4. Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Pour une activation avec Z jetons, on effectue Z simulations indépendantes de X et on additionne leurs valeurs dans s . On ne remplace Z par s qu'après avoir calculé toute la nouvelle génération.

Python

```
import numpy.random as rd

def simule_X(p):
    Y = 1
    while rd.random() > p:
        Y = Y + 1
    return Y - 1

def simule_Z(n, p):
    Z = 1
    for i in range(n):
        s = 0
        for j in range(Z):
            s = s + simule_X(p)
        Z = s
    return Z
```

Après i tours de la boucle extérieure, Z représente Z_i . La boucle `range(Z)` utilise le nombre de jetons avant l'activation. Si Z vaut 0, cette boucle est vide, s reste nul et l'état 0 est conservé. Pour $n = 0$, le résultat est 1, conformément à $Z_0 = 1$. Ces fonctions ont été exécutées, notamment pour le cas initial et l'absorption en zéro; les simulations

illustrent les lois sans les démontrer.

5. a) Comme $Z_0 = 1$ avec certitude, $u_0 = 0$. La loi de Z_1 est celle de X , donc

$$u_1 = P(X = 0) = p.$$

5. b) Dès que le joueur n'a plus de jetons, la machine n'en reverse plus. Ainsi

$$[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0].$$

En prenant les probabilités, on obtient $u_n \leq u_{n+1}$. La suite est croissante et majorée par 1, puisque ses termes sont des probabilités. Le théorème de convergence monotone des suites réelles donne donc une limite $\ell \in [0, 1]$.

6. L'événement « finir par ne plus avoir de jeton » est

$$R = \bigcup_{n \geq 0} [Z_n = 0].$$

Cette réunion est croissante d'après la question 5 b). Par continuité croissante des probabilités,

$$P(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0) = \ell.$$

7. a) Question adaptée au programme actuel : la convention de puissance nulle précise un cas limite de l'identité admise. Pour tout $k \geq 0$, $P(Z_1 = k) = pq^k > 0$, de sorte que la probabilité conditionnelle est définie.

Si $k \geq 1$, les k variables utilisées à l'activation suivante sont indépendantes, de même loi que X , et à valeurs positives ou nulles. Leur somme est donc nulle exactement lorsqu'elles sont toutes nulles. Les fonctionnements successifs étant indépendants, on a

$$P(Z_2 = 0 \mid Z_1 = k) = \prod_{j=1}^k P(X_j = 0) = p^k = (u_1)^k.$$

Si $k = 0$, l'état zéro est absorbant et la probabilité vaut 1, qui est aussi p^0 .

Résultat admis dans cette version adaptée, déjà admis dans le sujet source : pour tous $n, k \in \mathbb{N}$,

$$P(Z_{n+1} = 0 \mid Z_1 = k) = (u_n)^k.$$

Cette identité permet de calculer u_{n+1} par les probabilités totales à la question suivante. La convention ajoutée pour l'exposant nul précise le cas $n = k = 0$, où le membre de gauche vaut 1.

7. b) Les événements $[Z_1 = k]$, pour $k \in \mathbb{N}$, forment un système complet d'événements de probabilités strictement positives. La formule des probabilités totales et l'identité admise donnent

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k)P(Z_{n+1} = 0 \mid Z_1 = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} pq^k(u_n)^k.$$

Or $0 \leq qu_n \leq q < 1$. La série géométrique converge et sa somme est donc

$$u_{n+1} = p \sum_{k=0}^{+\infty} (qu_n)^k = \frac{p}{1 - qu_n}.$$

Le dénominateur est au moins $1 - q = p > 0$; la relation est valable également pour $n = 0$.

8. a) On a $1 - qu_n \geq p > 0$ et $u_n \rightarrow \ell$. Par continuité du quotient,

$$\ell = \frac{p}{1 - q\ell}.$$

Il vient $q\ell^2 - \ell + p = 0$. Comme $p + q = 1$,

$$(\ell - 1)(q\ell - p) = q\ell^2 - (p + q)\ell + p = 0.$$

Les seules limites possibles sont donc 1 et p/q .

8. b) Si $p > 1/2$, alors $p > q$ et $p/q > 1$. La limite $\ell \in [0, 1]$ ne peut être p/q ; elle vaut donc 1.

Si $p = 1/2$, les deux racines de la question précédente sont égales à 1, donc $\ell = 1$ également. D'après la question 6, $P(R) = 1$ dans les deux cas.

8. c) Ici $p < q$ et $0 < p/q < 1$. Posons $F(x) = p/(1 - qx)$. Sur $[0, p/q]$, le dénominateur est au moins $1 - p = q > 0$ et

$$F'(x) = \frac{pq}{(1 - qx)^2} > 0, \quad F(0) = p, \quad F(p/q) = p/q.$$

Ainsi $F([0, p/q]) \subset [0, p/q]$. Comme $u_0 = 0$ appartient à cet intervalle et $u_{n+1} = F(u_n)$, une récurrence prouve $0 \leq u_n \leq p/q$ pour tout n .

En passant à la limite, $\ell \leq p/q < 1$. La question 6 donne $P(R) < 1$. Plus précisément, la question 8 a) impose alors $\ell = p/q$.

8. d) Si le casino veut que le joueur finisse presque sûrement par perdre tous ses jetons, il doit choisir $p \geq 1/2$. Cette condition donne aussi $E(X) = q/p \leq 1$: pour un jeton engagé, le nombre moyen rendu n'excède pas un jeton. Pour $p > 1/2$, l'inégalité est stricte et la machine procure un gain moyen positif sur chaque jeton engagé.

Compte tenu de l'hypothèse initiale $p \in]0, 1[$, les valeurs admissibles dans l'intervalle indiqué sont exactement $p \in [1/2, 1[$; l'extrémité 1 est exclue du modèle de cet exercice. Le cas $p = 1/2$ est équilibré pour les seules mises, mais permet les revenus annexes évoqués dans la partie C.

Partie C

9. Question adaptée au programme actuel : le préambule précise la valeur du temps d'extinction si l'extinction n'a pas lieu, événement de probabilité nulle ici. Puisque l'état 0 est absorbant, ne plus avoir de jetons après n activations revient à avoir perdu son dernier jeton au plus tard à l'activation n . Ainsi $[T \leq n] = [Z_n = 0]$ et $P(T \leq n) = u_n$.

Pour $n \geq 1$, les événements $[T \leq n - 1]$ et $[T = n]$ sont disjoints et leur réunion est $[T \leq n]$. Donc

$$P(T = n) = u_n - u_{n-1} = (1 - v_n) - (1 - v_{n-1}) = v_{n-1} - v_n.$$

La question 8 b) assure que ces probabilités ont pour somme 1 : T prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ presque sûrement.

10. À ce stade, il s'agit uniquement de sommes finies : aucune existence d'espérance n'est présupposée. D'après la question 9,

$$\sum_{n=1}^N nP(T = n) = \sum_{n=1}^N nv_{n-1} - \sum_{n=1}^N nv_n.$$

En posant $k = n - 1$ dans la première somme et en séparant les extrémités,

$$\sum_{n=1}^N nv_{n-1} = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)v_k = \sum_{k=0}^{N-1} v_k + \sum_{k=1}^{N-1} kv_k.$$

Après soustraction de

$$\sum_{k=1}^{N-1} kv_k + Nv_N,$$

il reste

$$\sum_{n=1}^N nP(T = n) = \sum_{k=0}^{N-1} v_k - Nv_N.$$

11. a) Pour $p = q = 1/2$, la récurrence devient $u_{n+1} = 1/(2 - u_n)$. Au rang 0, $u_0 = 0 = 0/(0 + 1)$. Si $u_n = n/(n + 1)$, alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Par récurrence, $u_n = n/(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent $v_n = 1/(n+1)$.

11. b) Question adaptée au programme actuel : la conclusion précise l'absence d'espérance finie.

Méthode 1 — Sommes partielles de la question 10.

En utilisant $v_n = 1/(n+1)$,

$$\sum_{n=1}^N nP(T=n) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \frac{N}{N+1}.$$

La série harmonique diverge vers $+\infty$, tandis que $N/(N+1) \rightarrow 1$. Les sommes partielles de la série positive définissant l'espérance tendent donc vers $+\infty$. Ainsi T n'admet pas d'espérance finie.

Méthode 2 — Loi explicite de T .

La question 9 donne, pour $n \geq 1$,

$$P(T=n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Le terme de la série d'espérance vaut alors $nP(T=n) = 1/(n+1)$. Cette série harmonique décalée diverge, d'où la même conclusion. La première approche réutilise l'identité générale de la question 10 ; la seconde met directement en évidence la décroissance trop lente des probabilités pour donner une moyenne finie.

12. a) Comme $p > q > 0$, on a $p/q > 1 \geq u_n$: tous les dénominateurs qui définissent w_n sont strictement positifs. En notant $u = u_n$ et en utilisant $u_{n+1} = p/(1 - qu)$,

$$1 - u_{n+1} = \frac{1 - qu - p}{1 - qu} = \frac{q(1 - u)}{1 - qu},$$

$$\frac{p}{q} - u_{n+1} = \frac{p(1 - qu) - pq}{q(1 - qu)} = \frac{p(p - qu)}{q(1 - qu)} = \frac{p(\frac{p}{q} - u)}{1 - qu}.$$

Le quotient de ces deux égalités donne $w_{n+1} = (q/p)w_n$.

12. b) Posons $r = q/p \in]0, 1[$. Comme $u_0 = 0$, $w_0 = q/p = r$. La question 12 a) donne donc $w_n = r^{n+1}$. L'égalité

$$\frac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n} = r^{n+1}$$

équivalant à $1 - u_n = r^n - r^{n+1}u_n$, puis à $u_n(1 - r^{n+1}) = 1 - r^n$. Puisque $r < 1$, on obtient

$$u_n = \frac{1 - r^n}{1 - r^{n+1}}.$$

Par soustraction à 1,

$$v_n = \frac{(1 - r)r^n}{1 - r^{n+1}}.$$

Or $1 - r^{n+1} \geq 1 - r > 0$. Ainsi $0 \leq v_n \leq r^n$ pour tout $n \geq 0$, y compris $n = 0$ où les deux bornes supérieures valent 1.

12. c) Les termes $nP(T = n)$ sont positifs. D'après la question 10 et la majoration précédente, leurs sommes partielles vérifient

$$0 \leq \sum_{n=1}^N nP(T = n) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - Nv_N \leq \sum_{n=0}^{N-1} r^n \leq \frac{1}{1 - r}.$$

Ces sommes partielles sont croissantes et majorées, donc convergentes. Puisque $T \geq 0$, cela établit bien l'existence de son espérance et donne

$$E(T) \leq \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{q}{p}}.$$

On peut aussi préciser l'identité obtenue en passant à la limite : $0 \leq Nv_N \leq Nr^N \rightarrow 0$ par croissance comparée, donc

$$E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Cette identité est ici démontrée à partir des sommes finies, et non supposée connue.

- 13.** Pour le critère de durée moyenne adopté dans la partie C, $p = 1/2$ est le choix privilégié : le joueur perd tous ses jetons presque sûrement, mais la durée moyenne est infinie. Pour tout $p > 1/2$, cette durée moyenne est finie.

Si le casino exige en plus un gain moyen strictement positif sur les mises elles-mêmes, il doit retenir $p > 1/2$, plutôt proche de $1/2$ pour éviter une durée de jeu trop courte. En effet, pour chaque n fixé, l'expression de v_n tend vers $1/(n+1)$ lorsque $p \downarrow 1/2$: tout nombre fini de termes de la somme de survie se rapproche du cas critique, ce qui permet d'obtenir des durées moyennes arbitrairement grandes avec $p > 1/2$. Le choix précis demanderait des données économiques qui ne sont pas fournies.

Exercice 2

Dans cet exercice, le mot « trace » désigne uniquement l'application concrète définie dans l'énoncé par la somme de deux coefficients. Toutes les propriétés nécessaires sont établies ci-dessous à partir de cette définition ; aucune propriété générale supplémentaire n'est utilisée.

- 1. a)** Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les coefficients diagonaux de

$\alpha M + \beta N$ sont $\alpha a + \beta a'$ et $\alpha d + \beta d'$. Ainsi

$$\text{Tr}(\alpha M + \beta N) = \alpha(a + d) + \beta(a' + d') = \alpha \text{Tr}(M) + \beta \text{Tr}(N).$$

L'application est donc linéaire.

1. b) La condition $\text{Tr}(M) = 0$ équivaut à $d = -a$. Toute matrice du noyau s'écrit donc, de façon unique,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La famille (K_1, K_2, K_3) est

génératrice du noyau. L'égalité $aK_1 + bK_2 + cK_3 = 0$ impose $a = b = c = 0$ en lisant les trois premiers coefficients : elle est libre. C'est donc une base et $\dim(\text{Ker}(\text{Tr})) = 3$.

2. Pour tous M, N et tous réels α, β , la linéarité établie à la question 1 donne

$$f(\alpha M + \beta N) = \alpha M + \beta N + (\alpha \text{Tr}(M) + \beta \text{Tr}(N))J = \alpha f(M) + \beta f(N).$$

Les images restent dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc f est un endomorphisme de cet espace.

Pour disposer de sa représentation matricielle dans toute la suite, écrivons $J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Si $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, son vecteur de coordonnées dans $\mathcal{B}$ est $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, et les coordonnées

de $f(M)$ sont $A_J V$, avec

$$A_J = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 0 & a \\ b & 1 & 0 & b \\ c & 0 & 1 & c \\ d & 0 & 0 & 1+d \end{pmatrix}.$$

La réduction de f sera donc effectuée sur cette matrice réelle d'ordre 4 et ses vecteurs de coordonnées.

3. a) Pour $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la formule précédente donne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi lire les colonnes directement : $f(E_{11}) = E_{11} + 2E_{12} + E_{21}$, $f(E_{12}) = E_{12}$, $f(E_{21}) = E_{21}$ et $f(E_{22}) = 2E_{12} + E_{21} + E_{22}$, où les E_{ij} sont les matrices de la base $\mathcal{B}$.

3. b) Posons

$$B = A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les lignes 1 et 4 de B sont nulles. La ligne 2 de B^2 est deux fois la ligne 1 de B plus deux fois sa ligne 4 : elle est nulle. Sa ligne 3 est la somme de ces mêmes lignes : elle est nulle aussi. Les autres lignes de B^2 sont nulles. Ainsi $(A - I_4)^2 = B^2 = 0$.

3. c) Soit $V \neq 0$ un vecteur propre associé à une valeur propre λ . Alors $BV = (\lambda - 1)V$, d'où $B^2V = (\lambda - 1)^2V = 0$. Comme $V \neq 0$, on obtient $\lambda = 1$.

Cette valeur est bien propre : par exemple

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si A était diagonalisable, sa matrice diagonale semblable aurait uniquement des 1 sur la diagonale. Elle serait donc I_4 , et $A = PI_4P^{-1} = I_4$, contrairement au coefficient $A_{21} = 2$. Ainsi A n'est pas diagonalisable.

3. d) Méthode 1 — Exploiter le produit nul de la question 3 b).

Les matrices $I_4 + B$ et $I_4 - B$ vérifient

$$(I_4 + B)(I_4 - B) = (I_4 - B)(I_4 + B) = I_4 - B^2 = I_4.$$

Comme $A = I_4 + B$, elle est inversible et

$$A^{-1} = I_4 - B = 2I_4 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 — Résoudre un système avec second membre arbitraire.

Pour $W = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix}$, l'équation $AV = W$ avec $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix}$ donne successivement $x = r, v = u,$

$2x + y + 2v = s$ et $x + z + v = t$. Elle possède donc l'unique solution

$$V = \begin{pmatrix} r \\ s - 2r - 2u \\ t - r - u \\ u \end{pmatrix}.$$

L'unicité pour tout second membre prouve l'inversibilité et la lecture des coefficients redonne la même matrice inverse. La première méthode utilise l'identité particulière établie auparavant ; la seconde est un calcul de système qui fonctionne indépendamment de cette identité.

4. a) Utilisons la matrice A_J de la question 2. Avec $j = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \neq 0$ et $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, on a

$$(A_J - I_4)V = (x + t)j.$$

Puisque $j \neq 0$, l'égalité $A_J V = V$ équivaut à $x + t = 0$. Le sous-espace propre pour 1 correspond donc exactement aux matrices de $\text{Ker}(\text{Tr})$. D'après la question 1 b), il a pour base (K_1, K_2, K_3) et pour dimension 3. En particulier, 1 est bien une valeur propre.

4. b) Posons $s = \text{Tr}(J) = a + d$. La formule matricielle donne $A_J j = j + s j = (1 + s)j$.

Puisque $j \neq 0$, c'est un vecteur propre pour la valeur propre $1 + s$. De manière équivalente, $f(J) = (1 + \text{Tr}(J))J$.

4. c) i. Supposons $s \neq 0$. Les valeurs 1 et $1 + s$ sont distinctes. Les coordonnées de K_1, K_2, K_3 forment une base de l'espace propre pour 1.

Si V est un vecteur propre pour $1 + s$, alors $A_J V = (1 + s)V$ donne $(x + t)j = sV$. Comme $s \neq 0$, V est colinéaire à j . Réciproquement, tout multiple de j appartient à ce sous-espace. Ainsi l'espace propre pour $1 + s$ est de dimension 1 et a pour base (j) .

Pour vérifier la base complète sans supposer de résultat supplémentaire, considérons $\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3 + \beta J = 0$. La somme des deux coefficients diagonaux donne $\beta s = 0$, donc $\beta = 0$. La liberté de (K_1, K_2, K_3) impose alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

La famille (K_1, K_2, K_3, J) est donc une base de l'espace de dimension 4, et sa matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ -1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

est inversible. On a $A_J P = P \operatorname{diag}(1, 1, 1, 1 + s)$. Ainsi f est diagonalisable, avec exactement les valeurs propres 1 et $1 + s$ et les bases indiquées.

4. c) ii. Supposons maintenant $s = 0$, $\lambda \neq 1$ et $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \neq 0$ tel que $f(M) = \lambda M$. En

coordonnées, $A_J V = \lambda V$ donne

$$(\lambda - 1)V = (x + t)j.$$

Additionnons les première et quatrième coordonnées :

$$(\lambda - 1)(x + t) = (x + t)(a + d) = 0. \text{ Puisque } \lambda \neq 1, \text{ on obtient } x + t = \operatorname{Tr}(M) = 0.$$

L'égalité de vecteurs devient alors $(\lambda - 1)V = 0$, donc $V = 0$, contradiction. Ainsi aucune valeur propre différente de 1 n'existe dans ce cas.

4. c) iii. Si $\operatorname{Tr}(J) \neq 0$, la question 4 c) i prouve la diagonalisation.

Si $\operatorname{Tr}(J) = 0$, A_J n'a que la valeur propre 1. Une diagonalisation imposerait alors

$$A_J = I_4. \text{ Or } J \neq 0 \text{ et } (A_J - I_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = j \neq 0. \text{ La matrice n'est donc pas l'identité et ne}$$

peut être diagonalisable.

Finalement, f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Tr}(J) \neq 0$.

4. d) Méthode 1 — Étudier le noyau de la matrice.

Toujours avec $s = a + d$, si $s = -1$, la question 4 b) donne $A_J j = 0$ avec $j \neq 0$.

L'application n'est donc pas injective et ne peut être bijective.

Si $s \neq -1$ et $A_J V = 0$, alors $V = -(x + t)j$. La somme de ses première et quatrième coordonnées donne $x + t = -(x + t)s$, soit $(1 + s)(x + t) = 0$. Donc $x + t = 0$, puis $V = 0$. La matrice a un noyau réduit à zéro. L'endomorphisme d'un espace de dimension finie est ainsi injectif, donc bijectif.

La condition nécessaire et suffisante est $\text{Tr}(J) \neq -1$.

Méthode 2 — Construire l'inverse.

Pour $s \neq -1$ et pour une matrice donnée N , posons

$$M = N - \frac{\text{Tr}(N)}{1 + s} J.$$

La linéarité de l'application définie à la question 1 donne $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(N)/(1 + s)$. Par conséquent

$$f(M) = N - \frac{\text{Tr}(N)}{1 + s} J + \frac{\text{Tr}(N)}{1 + s} J = N.$$

Réciproquement, toute solution de $f(M) = N$ satisfait $(1 + s) \text{Tr}(M) = \text{Tr}(N)$, ce qui impose exactement la formule ci-dessus. La solution est donc unique pour tout N , et cette formule est celle de f^{-1} . Cette seconde méthode fournit l'inverse lui-même, alors que la première suffit à reconnaître la bijectivité.

Exercice 3

Partie A

1. Sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, 1[$, f est un quotient de fonctions continues, de dénominateur non nul, avec $1 - t > 0$. Il reste à étudier 0.

La dérivabilité de $\ln$ en 1 donne $\lim_{t \rightarrow 0} \ln(1 - t)/(-t) = 1$. Ainsi $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1 = f(0)$. La fonction est donc continue sur tout $] -\infty, 1[$.

2. a) Posons $h(t) = t/(1 - t) + \ln(1 - t)$, définie et dérivable pour $t < 1$. On a

$$h'(t) = \frac{1}{(1 - t)^2} - \frac{1}{1 - t} = \frac{t}{(1 - t)^2}.$$

Elle est donc strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, 1[$. Elle admet son minimum en 0, avec $h(0) = 0$. Ainsi $h(t) \geq 0$ pour $t < 1$, et même $h(t) > 0$ si $t \neq 0$.

2. b) Sur les deux intervalles indiqués, le numérateur est de classe $\mathcal{C}^1$ et le dénominateur ne s'annule pas. Le quotient est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(t) = \frac{\frac{t}{1 - t} + \ln(1 - t)}{t^2} = \frac{h(t)}{t^2}.$$

2. c) D'après 2 a), $f'(t) > 0$ pour $t < 1$ et $t \neq 0$. Donc f est strictement croissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$.

Sa continuité en 0 permet de raccorder ces deux variations : si $x < 0 < y$, la stricte croissance sur chaque côté et les limites en 0 donnent $f(x) < f(0) < f(y)$. Ainsi f est strictement croissante sur $] -\infty, 1[$.

3. a) La fonction $g(t) = \ln(1 - t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0, avec $g(0) = 0$, $g'(0) = -1$ et $g''(0) = -1$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 donne directement

$$\ln(1 - t) = -t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0.$$

3. b) Pour $t \neq 0$, l'égalité précédente donne, par division explicite par $-t$,

$$f(t) = 1 + \frac{t}{2} - t\varepsilon(t).$$

Puisque $f(0) = 1$, le taux d'accroissement vaut

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{1}{2} - \varepsilon(t) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1/2$. Ce calcul s'appuie sur le reste explicite de Taylor-Young ; il n'utilise pas de règle générale de composition de développements limités.

3. c) Question adaptée au programme actuel : l'indication permet un calcul direct de la limite de f' sans supposer une technique de calcul de développements limités.

La fonction $h(t) = t/(1-t) + \ln(1-t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ près de 0. D'après 2 a),

$h'(t) = t/(1-t)^2$, puis

$$h''(t) = \frac{1+t}{(1-t)^3}.$$

Ainsi $h(0) = h'(0) = 0$ et $h''(0) = 1$. Taylor-Young appliqué directement à h donne

$$h(t) = \frac{t^2}{2} + t^2\eta(t), \quad \eta(t) \rightarrow 0.$$

Pour $t \neq 0$, la question 2 b) donne donc $f'(t) = 1/2 + \eta(t) \rightarrow 1/2 = f'(0)$. La dérivée est continue en 0, et elle est déjà continue ailleurs par 2 b). Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$.

4. Lorsque $t \rightarrow -\infty$, posons $s = -t \rightarrow +\infty$. On obtient

$$f(t) = \frac{\ln(1+s)}{s} = \frac{\ln(1+s)}{1+s} \frac{1+s}{s} \rightarrow 0$$

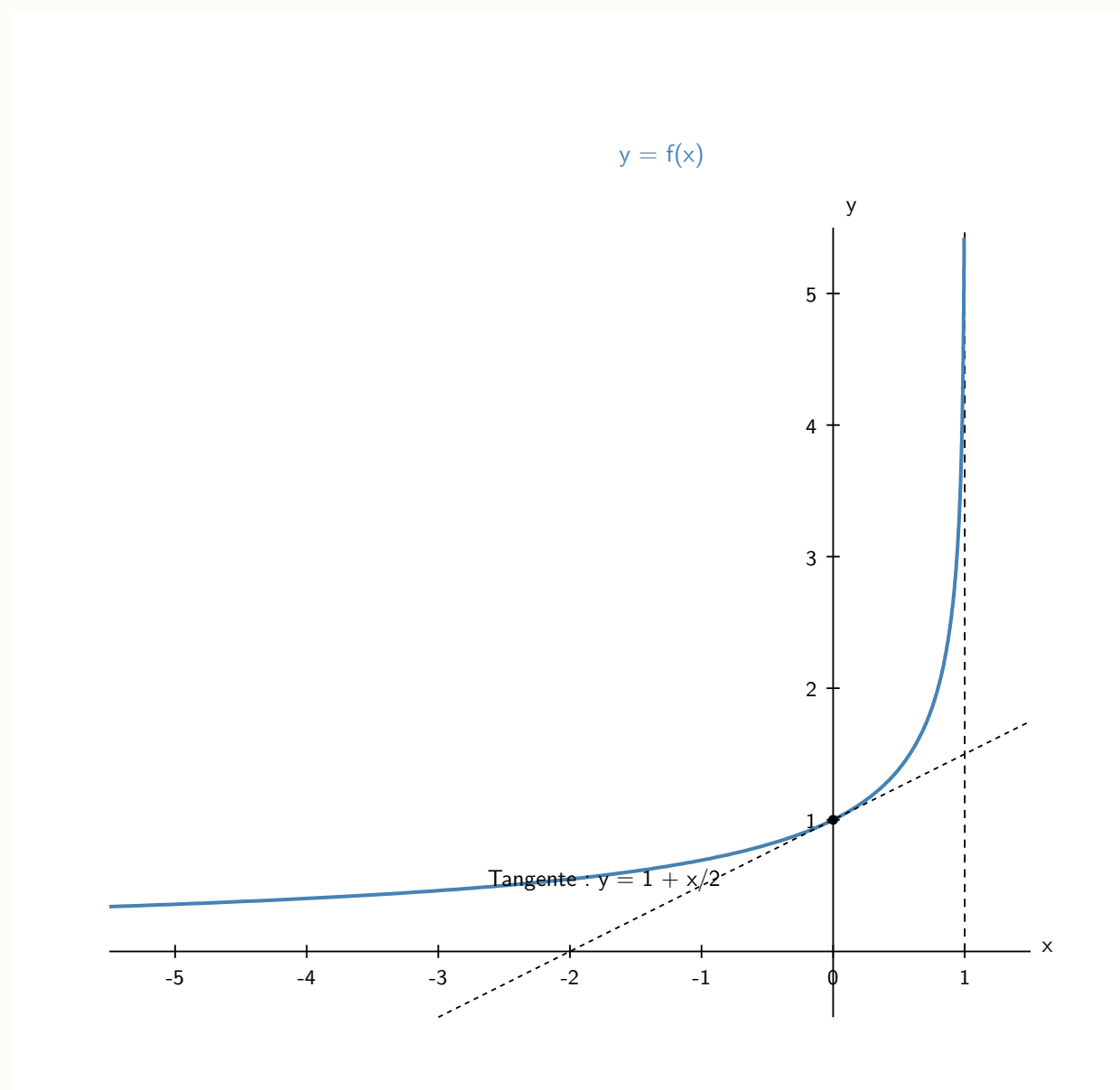
par croissance comparée. Lorsque $t \rightarrow 1^-$, le numérateur $-\ln(1-t)$ tend vers $+\infty$ et $t \rightarrow 1$, donc $f(t) \rightarrow +\infty$.

La courbe admet donc l'asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$ et l'asymptote verticale $t = 1$.

5. On réunit les résultats précédents : f est strictement croissante et positive sur $] -\infty, 1[$, elle tend vers 0 à gauche et vers $+\infty$ en 1^- , et elle passe par $(0, 1)$ avec pente $1/2$. Sa tangente en 0 a pour équation

$$y = f(0) + f'(0)t = 1 + \frac{t}{2}.$$

Le tracé suivant utilise les valeurs de la fonction définie dans le sujet ; les deux axes ont la même échelle.



Partie B

6. La fonction f est continue sur l'intervalle $] -\infty, 1[$ et 0 appartient à cet intervalle. Le théorème fondamental de l'intégration assure que la fonction $L(x) = \int_0^x f(t) dt$ est une primitive de f sur cet intervalle. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et $L'(x) = f(x)$ pour tout $x < 1$.

7. a) Sur le segment reliant A à B , le changement affine $s = 1 - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissant. On a $dt = -ds$, $t = A \Rightarrow s = 1 - A$ et $t = B \Rightarrow s = 1 - B$. Ainsi

$$\int_A^B \frac{-\ln(1-t)}{t} dt = \int_{1-A}^{1-B} \frac{-\ln(s)}{1-s} (-ds) = \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(s)}{1-s} ds.$$

Tous les intégrands sont continus sur les segments concernés. L'égalité reste valable pour $A > B$, avec la convention des intégrales orientées.

7. b) Pour $t \in]0, 1[$, la somme géométrique finie donne

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^n t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

Il suffit de multiplier cette égalité finie par $-\ln(t)$ pour obtenir

$$\frac{-\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^n -t^k \ln(t) + \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t}.$$

Aucun échange entre somme infinie et intégrale n'intervient.

7. c) Question adaptée au programme actuel : le passage à la borne finie est guidé par l'intégration sur un segment.

Pour $a \in]0, 1[$, les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, 1]$. Une intégration par parties avec $u(t) = -\ln t$ et $v'(t) = t^k$, donc $v(t) = t^{k+1}/(k+1)$, donne

$$\int_a^1 -t^k \ln(t) dt = \left[-\frac{t^{k+1} \ln t}{k+1} \right]_a^1 + \frac{1}{k+1} \int_a^1 t^k dt,$$

soit

$$\int_a^1 -t^k \ln(t) dt = \frac{a^{k+1} \ln a}{k+1} + \frac{1 - a^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Par croissance comparée, $a^{k+1} \ln a \rightarrow 0$ et $a^{k+1} \rightarrow 0$ lorsque $a \rightarrow 0^+$. La limite est finie : l'intégrale converge et vaut $1/(k+1)^2$.

7. d) Question adaptée au programme actuel : le guidage précise la justification des passages aux bornes finies.

Posons $g(t) = -t \ln(t)/(1-t)$ pour $0 < t < 1$. Lorsque $t \rightarrow 0^+$, $t \ln t \rightarrow 0$, donc $g(t) \rightarrow 0$. Lorsque $t \rightarrow 1^-$, la dérivabilité de $\ln$ en 1 donne $\ln(t)/(t-1) \rightarrow 1$, donc

$$g(t) = t \frac{\ln t}{t-1} \rightarrow 1.$$

En posant $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, on prolonge g en une fonction continue sur le segment $[0, 1]$. Elle y est donc bornée. Il existe $C \geq 0$ tel que $0 \leq g(t) \leq C$ sur ce segment.

Pour tout $n \geq 0$, l'intégrand étudié est $t^n g(t)$ sur $]0, 1[$. Il se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$, ce qui établit la convergence de l'intégrale. De plus,

$$0 \leq \frac{-t^{n+1} \ln t}{1-t} \leq C t^n.$$

En intégrant sur $[a, b] \subset]0, 1[$ puis en passant aux bornes grâce aux prolongements continus,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln t}{1-t} dt \leq \frac{C}{n+1}.$$

Le théorème d'encadrement donne la limite nulle demandée.

7. e) Pour $n = 0$, l'identité de 7 b) s'écrit

$$\frac{-\ln t}{1-t} = -\ln t + \frac{-t \ln t}{1-t}.$$

Les deux termes du membre de droite ont des intégrales convergentes sur $]0, 1[$ par 7 c) et 7 d). Leur somme a donc une intégrale convergente, ce qui établit d'abord l'existence de l'intégrale recherchée.

Pour un entier n fixé, intégrons ensuite l'identité finie de 7 b), d'abord sur un segment intérieur, puis aux bornes. Les intégrales de tous les termes sont convergentes d'après les mêmes questions, donc

$$\int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t} dt = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln t}{1-t} dt.$$

Quand $n \rightarrow \infty$, le dernier terme tend vers 0 par 7 d), tandis que la somme partielle tend vers la somme admise dans le sujet. Ainsi

$$\int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t} dt = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Cette preuve utilise un reste explicitement majoré; elle ne suppose aucun théorème d'intégration terme à terme d'une série infinie.

7. f) Pour $0 < A < B < 1$, la question 7 a) donne l'égalité des intégrales transformées. Fixons $B \in]0, 1[$ et faisons tendre A vers 0^+ . Le membre de gauche tend vers $L(B)$ par continuité de f en 0. À droite, l'intégrand $-\ln t/(1-t)$ se prolonge par continuité en 1, avec valeur 1. On obtient donc

$$L(B) = \int_{1-B}^1 \frac{-\ln t}{1-t} dt.$$

Lorsque $B \rightarrow 1^-$, cette intégrale tend vers l'intégrale convergente calculée en 7 e), c'est-à-dire $\pi^2/6$. Ainsi L est prolongeable par continuité en 1 en posant $L(1) = \pi^2/6$.

8. a) Posons $G(x) = L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$. Si $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, les arguments x , $-x$ et x^2 appartiennent à $] -\infty, 1[$. Les règles de composition et la question 6 donnent

$$G'(x) = f(x) - f(-x) - xf(x^2).$$

Pour ces $x \neq 0$,

$$f(x) - f(-x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} = -\frac{\ln(1-x^2)}{x},$$

car $1-x$ et $1+x$ sont positifs. D'autre part $xf(x^2) = -\ln(1-x^2)/x$. Donc $G'(x) = 0$ sur chacun des deux intervalles.

8. b) Une fonction dérivable de dérivée nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle. Ce résultat est applicable à G sur chacun des deux intervalles ouverts de la question précédente. Par continuité de L , G est continue en 0 et

$$G(0) = L(0) + L(0) - \frac{1}{2}L(0) = 0.$$

Les deux constantes sont donc nulles. L'égalité $G(x) = 0$ vaut pour $x \in]-1, 1[$. Le prolongement continu de L en 1 et sa continuité en -1 permettent de passer aux extrémités $x = \pm 1$. On obtient

$$\forall x \in [-1, 1], \quad L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2).$$

8. c) En prenant $x = 1$, on a $L(1) + L(-1) = \frac{1}{2}L(1)$, donc

$$L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Partie C

9. a) Sur l'ouvert $O =]-\infty, 0[^2$, les arguments x, y et $-xy$ sont strictement négatifs, donc dans le domaine de dérivabilité de L . La règle de dérivation d'une composée donne

$$\partial_1 \Phi(x, y) = f(x) + yf(-xy), \quad \partial_2 \Phi(x, y) = f(y) + xf(-xy).$$

Puisque $xy > 0$, les logarithmes suivants sont définis et les expressions se simplifient en

$$\partial_1 \Phi(x, y) = \frac{\ln(1 + xy) - \ln(1 - x)}{x}, \quad \partial_2 \Phi(x, y) = \frac{\ln(1 + xy) - \ln(1 - y)}{y}.$$

En effet, $f(-xy) = \ln(1 + xy)/(xy)$ et x, y sont non nuls.

9. b) Comme $x, y \neq 0$ et que $\ln$ est injective sur $]0, +\infty[$, l'annulation du gradient équivaut à

$$1 + xy = 1 - x, \quad 1 + xy = 1 - y.$$

La première égalité donne $x(y + 1) = 0$, donc $y = -1$. La seconde donne $y(x + 1) = 0$, donc $x = -1$. Réciproquement, ces deux valeurs annulent bien les deux dérivées et appartiennent à O . Ainsi $(-1, -1)$ est l'unique point critique.

10. a) Notons $A(x, y) = \ln(1 + xy) - \ln(1 - x)$. On a $\partial_1 \Phi = A/x$, avec $A(-1, -1) = 0$ et

$$\partial_1 A = \frac{y}{1 + xy} + \frac{1}{1 - x}, \quad \partial_2 A = \frac{x}{1 + xy}.$$

La dérivation du quotient donne

$$\partial_{11}^2 \Phi = \frac{1}{x} \left(\frac{y}{1 + xy} + \frac{1}{1 - x} \right) - \frac{A(x, y)}{x^2},$$

$$\partial_{12}^2 \Phi = \frac{1}{1 + xy}.$$

Au point $(-1, -1)$, on a $\partial_{11}^2 \Phi = (-1)(-1/2 + 1/2) - 0 = 0$ et $\partial_{12}^2 \Phi = 1/2$. La symétrie en x, y donne de même $\partial_{22}^2 \Phi = 0$. Comme Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur O , Schwarz donne $\partial_{21}^2 \Phi = \partial_{12}^2 \Phi = 1/2$. Par conséquent

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

10. b) On calcule directement

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont non colinéaires, donc forment une base de $\mathbb{R}^2$. Ils donnent toutes les valeurs propres : $1/2$ et $-1/2$. Aucun déterminant ni polynôme caractéristique n'est nécessaire.

11. Le domaine O est ouvert, Φ y est de classe $\mathcal{C}^2$ par l'hypothèse du sujet, et $(-1, -1)$ est son unique point critique. La hessienne en ce point possède deux valeurs propres non nulles de signes opposés. Le critère du programme assure qu'il s'agit d'un point selle, donc pas d'un extremum local.

Tout extremum local situé dans un ouvert et pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est nécessairement un point critique. Il n'y en a pas d'autre : Φ ne présente donc aucun extremum local sur $] -\infty, 0]^2$.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, questions 3 et 4 : Code adapté en Python. Les boucles et le nombre de tirages sont conservés ; la commande uniforme et l'indépendance des appels sont documentées.
- Exercice 1, question 7 a) : précision de la convention pour une puissance d'exposant nul, nécessaire dans l'identité admise au cas $n = k = 0$.
- Exercice 1, préambule de la partie C et question 11 b) : explicitation du temps d'extinction sur l'événement où l'extinction n'aurait pas lieu, de probabilité nulle ici, et précision « espérance finie » pour éviter toute confusion avec une moyenne étendue infinie.

- Exercice 3, question 3 c) : indication de Taylor-Young directement appliqué à la fonction h , afin de ne pas supposer de techniques de calcul de développements limités ou de théorème de prolongement de la dérivée.
- Exercice 3, questions 7 c) et 7 d) : indications de calcul sur un segment puis passage aux bornes, pour guider les singularités aux bornes finies sans importer un chapitre général supplémentaire.