



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques — Option économique

2021

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Problème 1

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Sur $] -\infty, 1[$, les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto 1 - x$ et $x \mapsto \ln(1 - x)$ sont continues, donc φ y est continue. Pour étudier le seul point restant, posons $u = 1 - x$. Lorsque $x \rightarrow 1^-$, on a $u \rightarrow 0^+$ et

$$\varphi(x) = 1 - u + u \ln u.$$

La croissance comparée $u \ln u \rightarrow 0$ donne $\varphi(x) \rightarrow 1 = \varphi(1)$. La fonction est donc continue sur tout son domaine $] -\infty, 1]$.

2. a) Sur l'ouvert $] -\infty, 1[$, les fonctions utilisées sont de classe C^1 . La dérivation du produit donne

$$\varphi'(x) = 1 - \ln(1 - x) - (1 - x) \frac{1}{1 - x} = -\ln(1 - x).$$

Cette dérivée est continue sur $] -\infty, 1[$, ce qui justifie la classe C^1 demandée.

2. b) Si $x < 0$, alors $1 - x > 1$ et $\varphi'(x) < 0$. Si $0 < x < 1$, alors $0 < 1 - x < 1$ et $\varphi'(x) > 0$. Enfin $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi(0) = 0$.

Ainsi, φ est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, 1]$, la continuité permettant d'inclure 1. Son minimum global est 0, atteint uniquement en 0.

x	$-\infty$	0	1
signe de φ'	—	0	+ sur $]0, 1[$
φ	décroît	0	croît vers 1

2. c) Pour $x < 1$, le taux d'accroissement à gauche de 1 est

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} = \frac{(1 - x)(\ln(1 - x) - 1)}{x - 1} = 1 - \ln(1 - x).$$

Il tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow 1^-$. Il n'existe donc pas de dérivée finie à gauche en 1. La courbe admet en revanche une demi-tangente verticale d'équation $x = 1$ au point $(1, 1)$.

3. Avec $u = 1 - x$, lorsque $x \rightarrow -\infty$, on a $u \rightarrow +\infty$ et

$$\varphi(x) = 1 + u(\ln u - 1).$$

Pour $u \geq e^2$, on a $\ln u - 1 \geq 1$, donc $\varphi(x) \geq 1 + u \rightarrow +\infty$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = +\infty$.

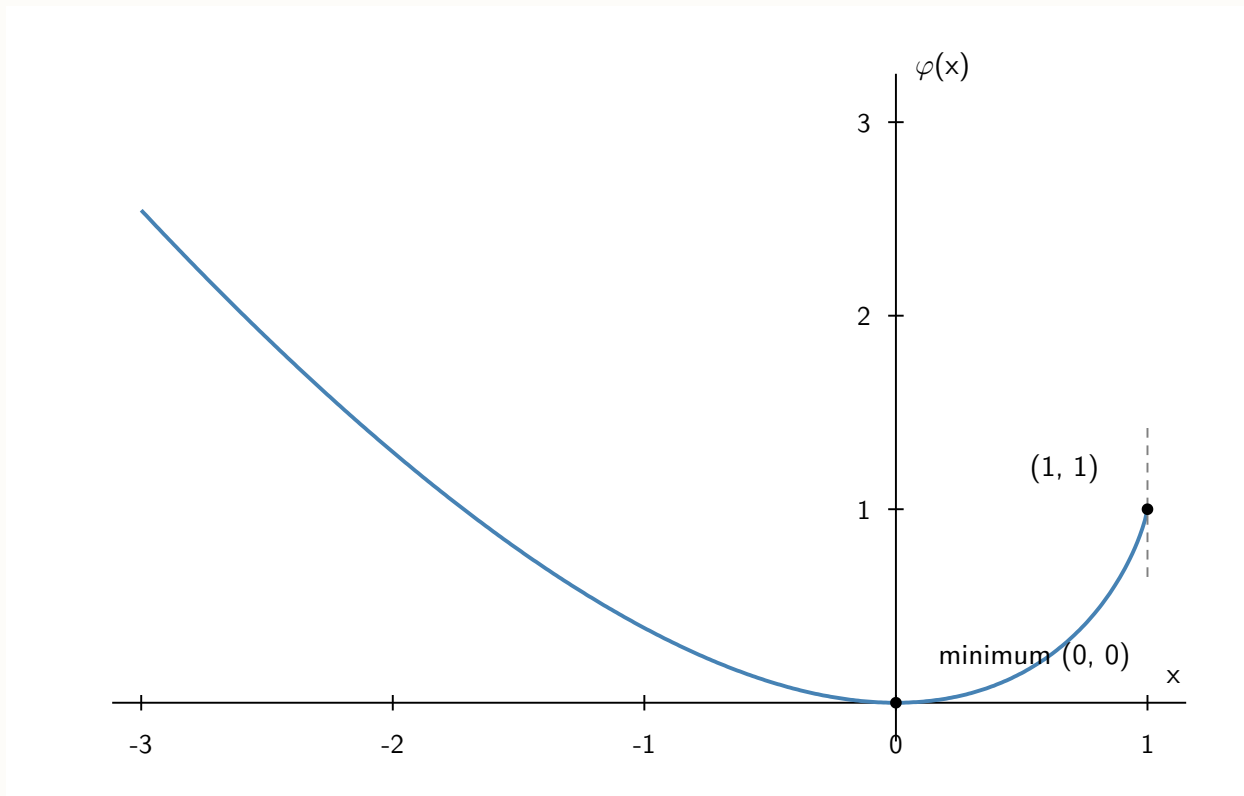
4. La courbe décroît depuis $+\infty$ jusqu'à $(0, 0)$, puis croît jusqu'à $(1, 1)$. En 0, $\varphi'(0) = 0$: la tangente est l'axe des abscisses. Pour préciser la forme locale, on dérive directement la fonction :

$$\varphi''(x) = \frac{1}{1 - x} > 0 \quad (x < 1).$$

Elle est donc strictement convexe sur $] -\infty, 1[$. En particulier φ est C^2 au voisinage de 0, et Taylor-Young appliqué directement à φ donne

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0).$$

En 1, la demi-tangente verticale obtenue en 2.c complète le tracé. La figure suivante est calculée à partir de la formule de φ .



5. a) Question adaptée au programme actuel : le passage à la borne singulière est guidé par un calcul sur segment. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, l'intégration par parties sur $[\varepsilon, 1]$, avec $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = t$, est licite et donne

$$\int_{\varepsilon}^1 t \ln t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^1 t \, dt = -\frac{\varepsilon^2 \ln \varepsilon}{2} - \frac{1 - \varepsilon^2}{4}.$$

Les croissances comparées donnent $\varepsilon^2 \ln \varepsilon \rightarrow 0$; l'intégrale converge donc et

$$\int_0^1 t \ln t \, dt = -\frac{1}{4}.$$

Comme $t \ln t \leq 0$ sur $]0, 1]$, la convergence absolue résulte aussi de ce calcul.

5. b) La fonction φ étant continue sur $[0, 1]$, son intégrale existe. Le changement de variable affine $t = 1 - x$ donne

$$\int_0^1 \varphi(x) \, dx = \int_0^1 x \, dx + \int_0^1 (1 - x) \ln(1 - x) \, dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 t \ln t \, dt = \frac{1}{4}.$$

La seconde intégrale peut s'entendre par prolongement continu de $t \ln t$ en 0, ou comme l'intégrale convergente calculée en 5.a ; les deux valeurs coïncident.

Partie B : Étude de deux séries

6. a) Puisque $0 \leq t \leq x < 1$, on a $t \neq 1$. La somme géométrique finie vaut

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1 - t^n}{1 - t}.$$

En soustrayant cette expression de $1/(1 - t)$, on obtient exactement $t^n/(1 - t)$, y compris pour $t = 0$.

6. b) Tous les termes de l'identité de 6.a sont continus sur $[0, x]$. En l'intégrant et en utilisant uniquement la linéarité d'une somme finie, on obtient

$$\int_0^x \frac{dt}{1 - t} - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k dt = \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt.$$

Les primitives donnent $-\ln(1 - x)$ et $x^{k+1}/(k + 1)$. Le changement d'indice $j = k + 1$ conduit donc à

$$-\ln(1 - x) - \sum_{j=1}^n \frac{x^j}{j} = \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt.$$

7. Pour $t \in [0, x]$, le dénominateur satisfait $1 - t \geq 1 - x > 0$. Par positivité et intégration des inégalités,

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt \leq \frac{1}{1 - x} \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{(n + 1)(1 - x)} \leq \frac{1}{(n + 1)(1 - x)}.$$

Le réel x étant fixé et inférieur à 1, le dernier membre tend vers 0. Le théorème d'encadrement entraîne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0.$$

8. D'après 6.b, la somme partielle d'ordre n est $-\ln(1-x)$ diminué de l'intégrale étudiée en 7. Elle tend donc vers $-\ln(1-x)$. Par définition de la convergence d'une série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Pour $x = 0$, les termes et la somme sont tous nuls ; ce cas est bien inclus dans la preuve.

9. a) Après multiplication par $n(n+1)$, l'égalité demandée devient

$$1 = a(n+1) + bn = (a+b)n + a.$$

Elle est valable pour tout $n \geq 1$ si et seulement si $a = 1$ et $a+b = 0$. On prend donc $a = 1$ et $b = -1$, ce qui donne $1/[n(n+1)] = 1/n - 1/(n+1)$.

9. b) Méthode 1 — Décomposition en deux séries connues.

Les deux séries à termes positifs

$$\sum_{n \geq 1} x^{n+1}/n$$

et

$$\sum_{n \geq 1} x^{n+1}/(n+1)$$

convergent par 8 et décalage d'indice. Leurs sommes valent respectivement $-x \ln(1-x)$ et $-\ln(1-x) - x$. Par linéarité de séries convergentes,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -x \ln(1-x) + \ln(1-x) + x = \varphi(x).$$

Cette méthode utilise directement les sommes déjà établies ; aucun échange entre série et intégrale n'est nécessaire.

Méthode 2 — Calcul d'une somme partielle.

Posons

$$A_n = \sum_{k=1}^n x^k / k$$

et

$$S_n = \sum_{k=1}^n x^{k+1} / [k(k+1)].$$

La décomposition de 9.a et un décalage dans une somme finie donnent

$$S_n = xA_n - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x^j}{j} = (x-1)A_n + x - \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Par 8, $A_n \rightarrow -\ln(1-x)$; de plus $0 \leq x^{n+1}/(n+1) \leq 1/(n+1) \rightarrow 0$. Il en résulte $S_n \rightarrow \varphi(x)$. Cette seconde approche ne manipule que des sommes finies avant le passage à la limite.

10. Pour tout entier $m \geq 1$, la somme est télescopique :

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{m+1}.$$

La limite vaut 1. La série converge donc et sa somme est $1 = \varphi(1)$. Ce calcul au bord est direct ; il ne suppose aucune continuité d'une somme de série dépendant d'un paramètre.

Partie C : Application en probabilité

11. a) L'événement $N = n$, pour $n \geq 2$, signifie qu'on tire $n - 2$ boules bleues successivement, puis une boule rouge. Avant le k -ième tirage, si les précédents étaient bleus, il y a k boules bleues et une rouge. La probabilité conditionnelle de poursuivre par une bleue est donc $k/(k+1)$. Après $n - 2$ bleues, la probabilité de tirer la rouge est $1/n$.

La formule des probabilités composées donne

$$P(N = n) = \left(\prod_{k=1}^{n-2} \frac{k}{k+1} \right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Pour $n = 2$, le produit vide vaut 1 et on obtient bien $1/2$, probabilité d'une rouge immédiate. Par l'arrêt presque sûr admis et l'impossibilité de terminer avec moins de deux boules, ces événements constituent un système complet, à un événement de probabilité nulle près.

11. b) La variable N est positive. La série définissant son espérance est

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n P(N = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}.$$

Il s'agit de la série harmonique, divergente. Ainsi N n'admet pas d'espérance finie; on peut noter $E(N) = +\infty$ au sens étendu, mais il n'existe pas d'espérance réelle.

- 12.** Code adapté en Python. La variable b compte les boules bleues présentes; il y a toujours une seule rouge. Une boule bleue apparaît avec probabilité $b/(b+1)$ et entraîne l'ajout d'une bleue. L'arrêt de la boucle correspond au premier tirage rouge.

Python

```
from numpy.random import random

def simuleN():
    b = 1
    while random() < b / (b + 1):
        b = b + 1
    N = b + 1
    return N
```

Le nombre total final est $b + 1$. L'algorithme s'arrête presque sûrement dans le modèle probabiliste, conformément à l'hypothèse du sujet. L'absence d'espérance finie de N signifie que le coût moyen théorique de cette simulation n'est pas fini; elle ne remet pas en cause l'arrêt presque sûr.

- 13.** a) Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$. La probabilité $P(N = n)$ est strictement positive. Sur l'événement $N = n$, l'événement $T \leq x$ équivaut à $X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x$. L'indépendance mutuelle de $X_1, \dots, X_n, N$ donne

$$P((T \leq x) \cap (N = n)) = P(N = n) \prod_{j=1}^n P(X_j \leq x) = P(N = n)F(x)^n.$$

La division par $P(N = n) > 0$ permet donc de conclure : $P_{[N=n]}(T \leq x) = F(x)^n$.

13. b) La formule des probabilités totales appliquée au système $(N = n)_{n \geq 2}$ fournit

$$P(T \leq x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{F(x)^n}{n(n-1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{F(x)^{k+1}}{k(k+1)}.$$

Comme $F(x) \in [0, 1]$, on applique 9.b si $F(x) < 1$, et 10 si $F(x) = 1$. Dans tous les cas,

$$P(T \leq x) = \varphi(F(x)).$$

14. a) Code adapté en Python. On simule d'abord N , puis, indépendamment, exactement N uniformes et on en prend le maximum. Voici le code complet nécessaire, y compris la fonction précédente :

Python

```
import numpy as np

from numpy.random import random

def simuleN():
    b = 1
    while random() < b / (b + 1):
        b = b + 1
    return b + 1

def simuleT():
    n = simuleN()
    x = random(n)
    return np.max(x)
```

Comme $n \geq 2$, le tableau est toujours non vide et le maximum est défini. Le tirage uniforme numérique utilise $[0, 1[$, ce qui représente la même loi que $[0, 1]$.

14. b) Code adapté en Python. Chaque boucle intérieure crée 1000 réalisations indépendantes de T . Le coefficient `m[k]` en est la moyenne. La boucle extérieure répète cette expérience trois fois : la fonction renvoie un tableau de trois moyennes

empiriques.

Python

```
import numpy as np

from numpy.random import random

def simuleN():
    b = 1
    while random() < b / (b + 1):
        b = b + 1
    return b + 1

def simuleT():
    n = simuleN()
    return np.max(random(n))

def mystere():
    m = np.zeros(3)
    for k in range(3):
        s = np.zeros(1000)
        for j in range(1000):
            s[j] = simuleT()
        m[k] = np.mean(s)
    return m
```

Les valeurs du sujet sont proches de 0,75 : on conjecture $E(T) = 3/4$. Le fait que $0 \leq T \leq 1$ garantit une espérance et une variance finies, ce qui permet l'application de la loi faible des grands nombres aux moyennes. Les simulations suggèrent une valeur ; elles ne la démontrent pas.

14. c) La fonction de répartition uniforme vaut 0 pour $x < 0$, x pour $0 \leq x < 1$, et 1 pour $x \geq 1$. Comme $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$, la formule de 13.b devient

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \varphi(x) & 0 \leq x < 1, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

- 14.** d) Question adaptée au programme actuel. La continuité de φ sur $[0, 1]$ et les valeurs $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ assurent les raccordements des trois branches. Ainsi F_T est continue sur $\mathbb{R}$. Pour $0 < x < 1$,

$$F'_T(x) = -\ln(1-x) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} F'_T(x) = +\infty.$$

La dérivée non bornée à gauche de 1 empêche de rester dans le cadre des densités à limites latérales finies imposé ici. La demande originale d'étude d'une variable à densité est donc remplacée par ces propriétés de la fonction de répartition.

Résultat admis dans cette version adaptée : pour la variable T de la question 14, à valeurs dans $[0, 1]$, l'espérance existe et

$$E(T) = 1 - \int_0^1 P(T \leq t) dt.$$

L'intégrale est une intégrale sur segment d'une fonction continue. Ce résultat particulier permet le calcul de 14.e sans introduire une théorie générale supplémentaire.

- 14.** e) Question adaptée au programme actuel : on utilise l'identité particulière admise en 14.d. Elle donne

$$E(T) = 1 - \int_0^1 \varphi(t) dt.$$

Pour effectuer explicitement l'intégration par parties demandée, on reprend 5.a : sur $[\varepsilon, 1]$,

$$\int_{\varepsilon}^1 u \ln u du = -\frac{\varepsilon^2 \ln \varepsilon}{2} - \frac{1 - \varepsilon^2}{4} \rightarrow -\frac{1}{4}.$$

Avec le changement affine $u = 1 - t$, on en déduit

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \quad E(T) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Cette valeur confirme exactement la conjecture de 14.b.

15. a) Pour $\lambda > 0$, une variable exponentielle de paramètre λ a pour fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0. \end{cases}$$

15. b) Pour $x < 0$, on a $F_T(x) = \varphi(0) = 0$. Pour $x \geq 0$, on substitue $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ dans la formule de 13.b. Puisque $1 - F(x) = e^{-\lambda x} > 0$,

$$F_T(x) = 1 - e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x} \ln(e^{-\lambda x}) = 1 - (1 + \lambda x)e^{-\lambda x}.$$

Ainsi F_T est nulle sur $] -\infty, 0[$ et vaut $1 - (1 + \lambda x)e^{-\lambda x}$ sur $[0, +\infty[$.

15. c) La fonction F_T est continue sur chaque branche ; en 0, la branche de droite vaut $1 - 1 = 0$, ce qui assure la continuité globale. Elle est C^1 de part et d'autre de 0, et, pour $x > 0$,

$$F'_T(x) = -\lambda e^{-\lambda x} + \lambda(1 + \lambda x)e^{-\lambda x} = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

On peut donc choisir

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & x \geq 0. \end{cases}$$

Cette fonction est positive ou nulle et continue, y compris en 0, où ses limites latérales sont nulles. Elle respecte donc les limites finies requises. Les limites $F_T(-\infty) = 0$ et $F_T(+\infty) = 1$ donnent aussi $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1$. La variable T est bien à densité.

15. d) Méthode 1 — Transfert à partir de X_1 .

L'exponentielle X_1 admet une variance $1/\lambda^2$ et une espérance $1/\lambda$. Elle possède donc un moment d'ordre deux fini, et Koenig-Huygens donne

$$E(X_1^2) = V(X_1) + E(X_1)^2 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Le transfert pour X_1 de densité $\lambda e^{-\lambda x}$ sur $[0, +\infty[$ signifie que $\int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$ converge et vaut $E(X_1^2)$. Comme $T \geq 0$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} xg(x) dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda E(X_1^2) < +\infty.$$

L'existence de l'espérance est ainsi justifiée avant son calcul : $E(T) = \lambda E(X_1^2) = 2/\lambda$.

Méthode 2 — Intégration par parties sur segment.

Pour $R > 0$, une intégration par parties donne

$$\lambda^2 \int_0^R x^2 e^{-\lambda x} dx = -\lambda R^2 e^{-\lambda R} + 2\lambda \int_0^R x e^{-\lambda x} dx.$$

Une seconde intégration par parties, toujours sur $[0, R]$, fournit

$$\int_0^R x e^{-\lambda x} dx = -\frac{R}{\lambda} e^{-\lambda R} + \frac{1 - e^{-\lambda R}}{\lambda^2}.$$

Les produits $R e^{-\lambda R}$ et $R^2 e^{-\lambda R}$ tendent vers 0 par croissances comparées. On obtient

donc $\int_0^{+\infty} xg(x) dx = 2/\lambda$, ce qui prouve simultanément l'existence et la valeur de $E(T)$. Cette approche vérifie directement l'intégrale, tandis que la première réutilise les moments connus de l'exponentielle.

Problème 2

Partie A : Généralités

1. Pour tous réels a, b, c , la matrice $M(a, b, c)$ est réelle et symétrique. Le résultat admis du programme affirme que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Ses hypothèses sont ici satisfaites.

2. a) Raisonnons par l'absurde et supposons que $M = M(a, b, c)$ ait une unique valeur propre λ . Comme M est diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que $M = PDP^{-1}$, où les coefficients diagonaux de D sont des valeurs propres de M . Ils seraient tous égaux à λ , d'où

$$M = P(\lambda I_3)P^{-1} = \lambda I_3.$$

Or les coefficients hors diagonale de M valent 1, contrairement à ceux de λI_3 , qui valent 0. Cette contradiction exclut l'unique valeur propre.

2. b) Une matrice diagonalisable de taille 3 possède au moins une valeur propre et au plus trois valeurs propres distinctes, comme le montre sa forme diagonale. Le cas d'une seule valeur ayant été exclu, il reste exactement deux ou trois valeurs propres distinctes.

3. a) Changer la base canonique en (e_2, e_1, e_3) permute les deux premières coordonnées, aussi bien pour les colonnes que pour les lignes. En effet,

$$\begin{aligned} f(e_2) &= (1+b)e_2 + e_1 + e_3, & f(e_1) &= e_2 + (1+a)e_1 + e_3, & f(e_3) &= e_2 + e_1 \\ & & & & & + (1+c)e_3. \end{aligned}$$

La matrice cherchée est donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} = M(b, a, c).$$

3. b) Les matrices de 3.a représentent le même endomorphisme dans deux bases ; elles sont donc semblables. Pour rappeler pourquoi leurs valeurs propres coïncident, si $M' = P^{-1}MP$ et $MX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors

$$M'(P^{-1}X) = P^{-1}MX = \lambda P^{-1}X.$$

Le vecteur $P^{-1}X$ est non nul. L'argument réciproque s'obtient avec P , donc $M(a, b, c)$ et $M(b, a, c)$ ont les mêmes valeurs propres.

3. c) Dans la base $\mathcal{B}'' = (e_1, e_3, e_2)$, la permutation simultanée des deuxième et troisième coordonnées transforme $M(a, b, c)$ en

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{pmatrix} = M(a, c, b).$$

Ces matrices sont encore semblables et ont donc les mêmes valeurs propres. En combinant les échanges des positions 1, 2 et 2, 3, on peut réaliser toute permutation de trois positions. Le spectre ne dépend ainsi pas de l'ordre de a, b, c .

Partie B : Cas d'un seul paramètre distinct

4. a) Tous les coefficients de J valent 1. Chaque coefficient du produit J^2 est donc la somme de trois 1, d'où

$$J^2 = 3J.$$

Le polynôme $Q(X) = X^2 - 3X = X(X - 3)$ est donc un polynôme annulateur de J : $Q(J) = 0$.

4. b) Toute valeur propre de J est racine de Q , donc appartient à $\{0, 3\}$. Pour $X = {}^t(x, y, z)$, on a

$$JX = (x + y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $JX = 0$ équivaut à $x + y + z = 0$. On écrit alors $X = \alpha {}^t(1, -1, 0) + \beta {}^t(1, 0, -1)$, avec $\alpha = -y$ et $\beta = -z$. Les deux vecteurs sont indépendants car leurs deuxième et troisième coordonnées imposent $\alpha = \beta = 0$ dans une combinaison nulle. Une base de $E_0(J)$ est donc

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

D'autre part $JX = 3X$ implique $x = y = z$, et tout vecteur de cette forme convient. Une base de $E_3(J)$ est $({}^t(1, 1, 1))$. Les deux valeurs 0 et 3 sont donc effectivement propres.

4. c) Prenons les vecteurs précédents comme colonnes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les deux premiers vecteurs forment une base de $E_0(J)$; le troisième est un vecteur propre associé à une valeur propre distincte, donc la famille de trois vecteurs est libre. La matrice P est inversible et la relation colonne par colonne $JP = PD$ donne $J = PDP^{-1}$.

On peut contrôler l'inverse sans déterminant :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le produit avec P vaut bien I_3 .

5. a) On a $M(a, a, a) = aI_3 + J$. En utilisant 4.c,

$$M(a, a, a) = aPI_3P^{-1} + PDP^{-1} = P(aI_3 + D)P^{-1}.$$

5. b) La matrice diagonale $aI_3 + D$ a pour coefficients diagonaux $a, a, a + 3$. Ses valeurs propres sont donc a et $a + 3$, et ce sont aussi celles de $M(a, a, a)$ par similitude. Leur différence vaut 3, donc elles sont distinctes pour tout $a \in \mathbb{R}$.

5. c) Par 5.a, l'inversibilité équivaut à celle de la diagonale, donc à $a \neq 0$ et $a + 3 \neq 0$. Or

$$ab + bc + ac + abc = 3a^2 + a^3 = a^2(a + 3).$$

Cette expression est non nulle exactement sous les mêmes conditions. La propriété (*) est vérifiée pour $M(a, a, a)$.

Partie C : Cas de deux paramètres distincts

6. a) Les deux premières colonnes de $C = M(0, 0, c)$ sont identiques. Le vecteur non nul ${}^t(1, -1, 0)$ vérifie donc ${}^t(C(1, -1, 0)) = 0$. Ainsi 0 est valeur propre de C .

6. b) i. Le système $CX = \lambda X$ s'écrit

$$\begin{cases} x + y + z = \lambda x, \\ x + y + z = \lambda y, \\ x + y + (1 + c)z = \lambda z. \end{cases}$$

La différence des deux premières équations donne $\lambda(x - y) = 0$. Comme $\lambda \neq 0$, elle impose $y = x$. La première équation devient alors $z = (\lambda - 2)x$. En remplaçant dans la troisième, on obtient

$$2x + (1 + c)(\lambda - 2)x = \lambda(\lambda - 2)x,$$

soit, après regroupement, $[\lambda^2 - (c + 3)\lambda + 2c]x = 0$. Chaque transformation est réversible : on a bien l'équivalence demandée.

6. b) ii. Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre, il existe une solution $X \neq 0$ au système précédent. Les égalités $y = x, z = (\lambda - 2)x$ montrent que $x \neq 0$, faute de quoi $X = 0$. On peut donc diviser la dernière relation par x , ce qui donne

$$\lambda^2 - (c + 3)\lambda + 2c = 0.$$

Réciproquement, si $\lambda \neq 0$ satisfait cette égalité, le vecteur $X = {}^t(1, 1, \lambda - 2)$ est non nul et vérifie les trois relations de 6.b.i, donc $CX = \lambda X$. L'équivalence est démontrée.

6. c) Le discriminant du trinôme réel de 6.b.ii est

$$\Delta = (c + 3)^2 - 8c = c^2 - 2c + 9 = (c - 1)^2 + 8 > 0.$$

Il possède donc deux racines réelles distinctes, notées μ_- et μ_+ . Leur produit est $2c \neq 0$, donc aucune n'est nulle. Par 6.b.ii, ce sont deux valeurs propres de C , distinctes de la valeur propre 0 déjà obtenue. La matrice a donc trois valeurs propres distinctes.

7. a) La comparaison des coefficients donne directement

$$M(a, a, c) = aI_3 + M(0, 0, c - a).$$

Le réel $d = c - a$ est non nul, conformément à l'hypothèse de 6.

7. b) Pour tout vecteur non nul X , l'égalité $M(0, 0, d)X = \mu X$ équivaut à

$$M(a, a, c)X = (a + \mu)X.$$

Le spectre de $M(a, a, c)$ est ainsi obtenu en ajoutant a aux trois valeurs propres distinctes $0, \mu_-, \mu_+$ de $M(0, 0, d)$. Il comporte donc exactement trois valeurs propres distinctes $a, a + \mu_-, a + \mu_+$.

7. c) Une matrice diagonalisable est inversible si et seulement si ses valeurs propres sont toutes non nulles. La condition est ici

$$a(a + \mu_-)(a + \mu_+) \neq 0.$$

Les deux racines vérifient $\mu_- + \mu_+ = d + 3$ et $\mu_- \mu_+ = 2d$. On calcule donc

$$\begin{aligned} a(a + \mu_-)(a + \mu_+) &= a(a^2 + a(d + 3) + 2d) \\ &= a(a^2 + a(c - a + 3) + 2(c - a)) = a(ac + a + 2c) = a^2c + a^2 + 2ac. \end{aligned}$$

Or, pour le triplet (a, a, c) , l'expression de (*) vaut justement $a^2 + 2ac + a^2c$. La propriété est établie, y compris quand $a = 0$.

8. Si le cardinal vaut 2, deux paramètres sont égaux et le troisième est différent. Une permutation permet donc de réécrire le triplet sous la forme (u, u, v) avec $u \neq v$. La question 3 montre que cette permutation conserve les valeurs propres. La question 7 donne alors trois valeurs propres distinctes.

De plus, l'inversibilité est inchangée par similitude, et l'expression $ab + bc + ac + abc$ est inchangée par permutation des trois paramètres. La propriété démontrée en 7.c pour (u, u, v) vaut donc pour le triplet initial.

Partie D : Cas de trois paramètres distincts

9. a) Sur chacun des quatre intervalles de D , la fonction g est de classe C^1 et

$$g'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x-b)^2} - \frac{1}{(x-c)^2} < 0.$$

Elle est donc strictement décroissante sur chacun de ces intervalles. En $\pm\infty$, chacun des trois termes tend vers 0, donc $g(x) \rightarrow 0$, par valeurs négatives en $-\infty$ et positives en $+\infty$.

Au voisinage de a , les termes $1/(x-b)$ et $1/(x-c)$ ont une limite finie, et seul $1/(x-a)$ diverge. Il en est de même, par permutation, aux voisinages de b et c . Les limites et variations sont donc :

intervalle	limite à gauche de l'intervalle	variation	limite à droite de l'intervalle
$] -\infty, a[$	0^-	décroît	$-\infty$
$]a, b[$	$+\infty$	décroît	$-\infty$
$]b, c[$	$+\infty$	décroît	$-\infty$
$]c, +\infty[$	$+\infty$	décroît	0^+

En particulier, à chaque point a, b, c , la limite à gauche vaut $-\infty$ et la limite à droite $+\infty$.

9. b) Sur $] -\infty, a[$, les trois dénominateurs sont négatifs, donc $g(x) < 0$: il n'y a aucune

solution de $g(x) = 1$ sur cet intervalle.

Sur $]a, b[$ et $]b, c[$, la continuité, la stricte décroissance et les limites de 9.a assurent, par le théorème des valeurs intermédiaires et l'unicité liée à la stricte monotonie, une solution dans chacun des deux intervalles. Sur $]c, +\infty[$, les mêmes arguments s'appliquent car 1 est strictement entre 0 et $+\infty$.

Il y a donc exactement trois solutions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, rangées de façon que $a < \lambda_1 < b < \lambda_2 < c < \lambda_3$.

9. c) Les trois dénominateurs sont non nuls car $\lambda \in D$. La somme des coordonnées de X_λ est $g(\lambda) = 1$. La première coordonnée de $M(a, b, c)X_\lambda$ vaut donc

$$\frac{a}{\lambda - a} + 1 = \frac{\lambda}{\lambda - a}.$$

De même, les deux autres coordonnées valent $\lambda/(\lambda - b)$ et $\lambda/(\lambda - c)$. Ainsi $M(a, b, c)X_\lambda = \lambda X_\lambda$. Le vecteur X_λ est non nul, puisque chacune de ses coordonnées est l'inverse d'un réel non nul. C'est donc bien un vecteur propre associé à λ .

9. d) Les trois solutions distinctes de 9.b sont trois valeurs propres par 9.c. Une matrice de taille 3 ne peut pas en avoir plus de trois distinctes. Le spectre est donc exactement $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

10. a) Les réels a, b, c sont distincts et peuvent être rangés dans l'ordre strictement croissant par une permutation. Cette permutation conserve les valeurs propres par 3. Le cas ordonné ayant trois valeurs propres distinctes d'après 9.d, il en est de même pour le triplet initial.

10. b) Méthode 1 — Recherche directe d'un noyau non nul.

Pour $X = {}^t(x, y, z)$, posons $s = x + y + z$. L'égalité $M(a, b, c)X = 0$ équivaut à

$$ax + s = 0, \quad by + s = 0, \quad cz + s = 0.$$

Si $abc \neq 0$, on obtient $x = -s/a, y = -s/b, z = -s/c$. La somme des coordonnées impose alors

$$s \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 0.$$

Si le facteur entre parenthèses est non nul, on a $s = 0$, puis $X = 0$, donc M est inversible. S'il est nul, le vecteur non nul $X = {}^t(-1/a, -1/b, -1/c)$ a pour somme de coordonnées 1 et vérifie les trois équations du noyau ; M n'est donc pas inversible. Comme

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{abc + bc + ac + ab}{abc},$$

on obtient exactement (*) dans ce cas.

Si $abc = 0$, les paramètres étant distincts, un seul est nul. Par permutation, on peut supposer $a = 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$. La première équation impose $s = 0$, puis les deux autres donnent $y = z = 0$, et finalement $x = 0$. La matrice est donc inversible ; l'expression de (*) vaut alors $bc \neq 0$. Cela achève tous les cas.

Méthode 2 — Étude de la valeur propre nulle dans le cas ordonné.

On peut d'abord ordonner les paramètres grâce à 3 ; la permutation conserve à la fois l'inversibilité et l'expression de (*). Si $abc \neq 0$, le réel 0 appartient au domaine D de g . Les trois valeurs propres sont exactement les trois solutions de $g(x) = 1$, donc

$$0 \text{ est valeur propre} \iff g(0) = 1 \iff -\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 1.$$

En multipliant par $abc \neq 0$, la dernière condition devient $ab + ac + bc + abc = 0$. Or une matrice carrée est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre : on retrouve (*).

Si un paramètre est nul, la question 9.b montre que les trois valeurs propres sont strictement à l'intérieur d'intervalles dont les extrémités sont les paramètres. Aucune n'est égale au paramètre nul. La matrice est donc inversible et l'expression $ab + bc + ac + abc$ se réduit au produit non nul des deux autres paramètres. Cette seconde méthode utilise la localisation spectrale déjà construite ; la première procède directement par le système homogène.

11. a) On reconnaît $A = M(0, 1, 2)$. La propriété $(*)$, établie dans les cas précédents, s'applique et l'expression correspondante vaut

$$0 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 2 + 0 \times 1 \times 2 = 2 \neq 0.$$

Ainsi A est inversible.

11. b) i. Pour $(a, b, c) = (0, 1, 2)$, la plus grande valeur propre α est la solution unique de

$$g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 1$$

sur $]2, +\infty[$. La fonction g y est continue et strictement décroissante. On calcule

$$g(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{12} > 1, \quad g(5) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{47}{60} < 1.$$

L'unique solution est donc strictement entre 4 et 5 : $4 < \alpha < 5$.

11. b) ii. Code adapté en Python. L'invariant de boucle est $x \leq \alpha \leq y$, avec $g(x) \geq 1 \geq g(y)$. Comme g décroît, si $g(m) > 1$, il faut déplacer la borne gauche vers m ; sinon on déplace la borne droite vers m .

Python

```
def valeur_approchee():
    x = 4
    y = 5
    while y - x > 1e-3:
        m = (x + y) / 2
        if 1 / m + 1 / (m - 1) + 1 / (m - 2) > 1:
            x = m
        else:
            y = m
    alpha = (x + y) / 2
    return alpha
```

La largeur initiale est 1 et elle est divisée par 2 à chaque passage. Après 10 passages, elle vaut $2^{-10} < 10^{-3}$, donc la boucle s'arrête. Le milieu renvoyé est à distance au plus $(y - x)/2 < 5 \times 10^{-4}$ de la vraie valeur α ; la précision demandée est donc satisfaite. Les dénominateurs ne s'annulent jamais car $4 \leq x \leq m \leq y \leq 5$.

L'exécution donne $\alpha \simeq 4,21435546875$. Il s'agit de la valeur numérique renvoyée, dont la garantie d'erreur vient de l'encadrement, et non de la seule observation du résultat.

Relevé des adaptations

- Problème 1, 5.a : ajout du calcul sur $[\varepsilon, 1]$ avant passage à la limite, pour guider l'intégrale singulière en une borne finie.
- Problème 1, 12, 14.a et 14.b : Code adapté en Python ; commandes aléatoires et commandes NumPy documentées, indices convertis en indices commençant à zéro. Les blancs de 12 sont conservés dans le sujet.
- Problème 1, 14.d : la demande d'une densité non bornée au voisinage de 1 est remplacée par l'étude de la fonction de répartition et de sa dérivée. L'identité particulière $E(T) = 1 - \int_0^1 P(T \leq t) dt$ est admise pour cette seule variable bornée afin de conserver l'objectif de calcul de l'espérance.
- Problème 1, 14.e : calcul de l'espérance au moyen de l'identité précédente ; l'intégration par parties demandée reste effectuée.
- Problème 2, 11.b.ii : Code adapté en Python, avec conservation des lignes à compléter dans le sujet.