



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques — Option économique

2020

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}.$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f'(x) = \frac{-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)}{x(1-x)(\ln(x))^2}.$$

2. a) Justifier : $\forall t \in]0, 1[, \quad t \ln(t) < 0$.

2. b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$.

3. a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

3. b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.

En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, que l'on note u_n .

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

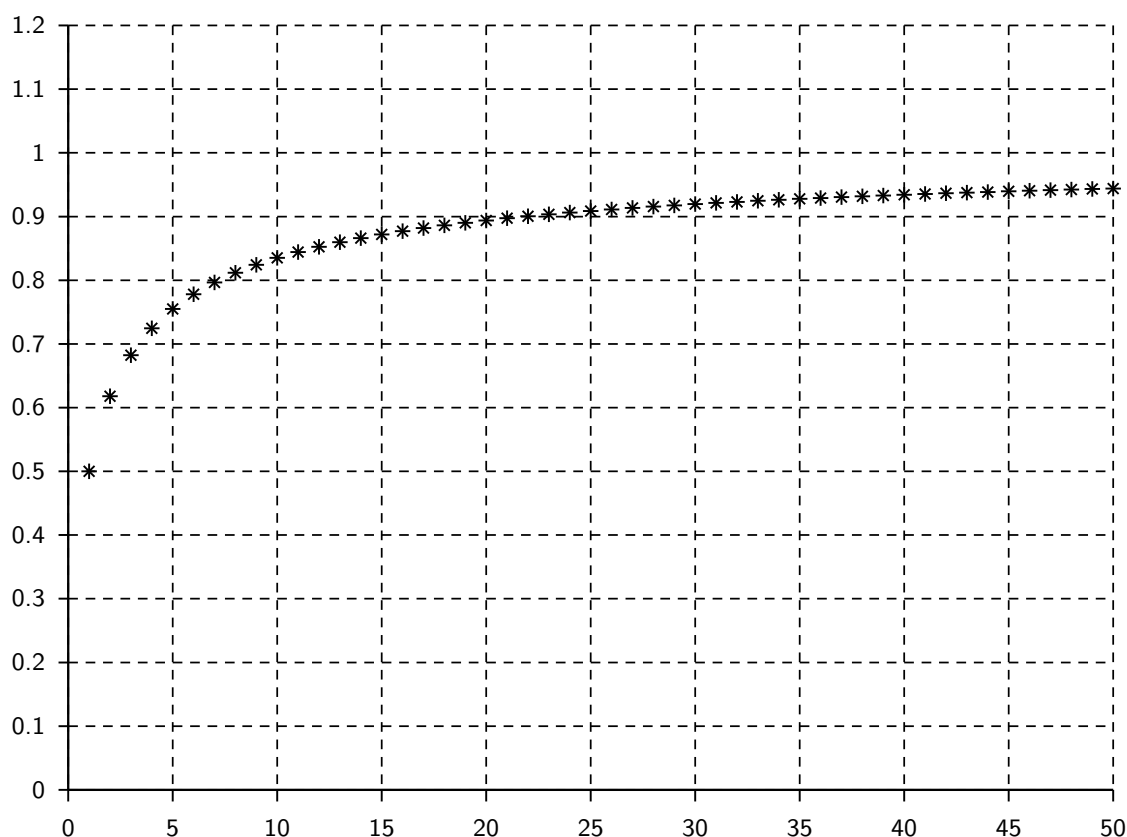
8. Déterminer u_1 et u_2 .

9. a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

Python

```
def valeur_approchee(n):
    a = 0
    b = 1
    while ...:
        c = (a + b) / 2
        if c**n + c - 1 > 0:
            ...
        else:
            ...
    u = ...
    return u
```

9. b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



10. a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.

10. b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

10. c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction F de classe C^2 sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad F(x, y) = x^2y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x.$$

11. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F en tout point (x, y) de $]0, +\infty[^2$.

11. b) Montrer que la fonction F admet (u_3, u_3^2) comme unique point critique, où le réel u_3 est l'unique solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation (E_3) définie dans la partie B.
12. a) Écrire la matrice hessienne, notée H , de la fonction F au point (u_3, u_3^2) .
12. b) Montrer que la matrice H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2 , vérifiant : $\lambda_1 \lambda_2 = -6u_3^2 - 2$.
13. La fonction F présente-t-elle des extremums locaux sur $]0, +\infty[^2$?

Exercice 2

On définit, pour tous réels a et b , $M(a, b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}, \quad E = \{M(a, b); (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Déterminer une base de E et sa dimension.
1. b) Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?
2. Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$.

Justifier que la matrice $M(0, 0)$ est diagonalisable.

3. Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.

Soit a un réel non nul. On note $A = M(a, 0)$.

3. a) Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A .

3. b) En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.

3. c) En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

4. Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.

Soit b un réel non nul. On note $B = M(0, b)$.

4. a) Déterminer le rang des matrices B et $B - bI_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.

4. b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.

4. c) La matrice B est-elle diagonalisable ?

5. Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M(a, b)$.

On pose : $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 0, 0, 1)$ et $T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$.

5. a) Montrer que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\text{Ker}(f)$.
5. b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. c) Déterminer la matrice, notée N , de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$.

5. d) Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Montrer : X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre λ si et seulement si

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ et $z = t = 0$.

5. e) On suppose dans cette question uniquement que $(a, b) = (1, 1)$. Déterminer les valeurs propres de T . En déduire que la matrice $M(1, 1)$ est diagonalisable.
5. f) On suppose dans cette question uniquement que $(a, b) = (1, -1)$. Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1, -1)$ est-elle diagonalisable?
5. g) Montrer l'équivalence : $M(a, b)$ est diagonalisable si et seulement si $a^2 + 10ab + b^2 > 0$.

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie A : Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b, \\ \frac{ab^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f .

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b .

2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que la variable aléatoire $bU^{-1/a}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b .
b) En déduire une fonction Python d'en-tête `def pareto(a, b):` qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X .

La commande `rd.random()`, après `import numpy.random as rd`, renvoie un nombre pseudo-aléatoire uniforme dans $[0, 1[$. Pour éviter de prendre une puissance négative de zéro, on pourra utiliser `1 - rd.random()`.

3. c) On considère la fonction Python ci-dessous. Que contient la liste L renvoyée par la fonction `mystere` ?

Python

```
def mystere(a, b):
    L = []
    for p in range(2, 7):
        S = 0
        for k in range(10**p):
            S = S + pareto(a, b)
        L.append(S / 10**p)
    return L
```

3. d) On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de a et de b . Comment interpréter les résultats obtenus ?

Les listes renvoyées lors des trois exécutions sont les suivantes, dans l'ordre de leurs cinq composantes :

Appel	1	2	3	4	5
mystere(2, 1)	1.9306917	1.9411352	1.9840089	1.9977684	2.0012415
mystere(3, 2)	3.1050951	3.0142956	2.9849407	2.9931656	2.9991517
mystere(1, 4)	21.053151	249.58609	51.230522	137.64549	40.243918

4. a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas,
- $$E(X) = \frac{ab}{a-1}.$$

4. b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas,
- $$V(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}.$$

Partie B : Estimation du paramètre b

On suppose dans cette partie uniquement que $a = 3$ et on cherche à déterminer un estimateur performant de b .

Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b, \\ \frac{3b^3}{x^4} & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X .

On définit : $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

On admet que Y_n et Z_n sont encore des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Un estimateur S_n de b est dit sans biais si son espérance existe et vaut b . Son risque quadratique est, lorsqu'il existe, $E((S_n - b)^2)$; pour un estimateur sans biais admettant une variance, ce risque est égal à sa variance.

5. a) Calculer, pour tout $x \in [b, +\infty[$, $P(Y_n > x)$.

5. b) En déduire que Y_n suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

5. c) Montrer que $Y'_n = \frac{3n-1}{3n}Y_n$ est un estimateur sans biais de b .

Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

6. a) Déterminer l'espérance et la variance de Z_n .

6. b) En déduire un estimateur noté Z'_n sans biais de b de la forme αZ_n où α est un réel à préciser.

Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

7. Entre Y'_n et Z'_n , quel estimateur choisir ? Justifier.

Partie C : Estimation du paramètre a

On suppose dans cette partie uniquement que $b = 1$ et on cherche à construire un intervalle de confiance pour a .

Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X .

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $W_n = \ln(X_n)$.

Montrer que la variable aléatoire W_n suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

En déduire l'espérance et la variance de W_n .

9. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \frac{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)}{n}$ et $T_n = \sqrt{n}(aM_n - 1)$.

9. a) Justifier que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

9. b) En déduire que l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{n} - 2}{\sqrt{n}M_n}, \frac{\sqrt{n} + 2}{\sqrt{n}M_n} \right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.

On admettra que $\Phi(2) \geq 0,975$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.