



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques — Option économique

2020

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie A : Étude de la fonction f

1. Les fonctions $x \mapsto \ln(1-x)$ et $x \mapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0, 1[$ et $\ln x$ n'y est jamais nul. La règle du quotient donne :

$$f'(x) = \frac{-\frac{\ln x}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-x \ln x - (1-x) \ln(1-x)}{x(1-x)(\ln x)^2}.$$

C'est l'expression demandée, valable sur tout $]0, 1[$.

2. a) Pour $0 < t < 1$, on a $t > 0$ et $\ln t < 0$. Leur produit vérifie donc $t \ln t < 0$.
2. b) Pour $x \in]0, 1[$, la question précédente s'applique à x et à $1-x$. Les deux termes $-x \ln x$ et $-(1-x) \ln(1-x)$ sont strictement positifs. Le dénominateur $x(1-x)(\ln x)^2$ est aussi strictement positif. Ainsi $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $]0, 1[$.
3. a) Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $\ln(1-x) \rightarrow 0$ tandis que $1/\ln x \rightarrow 0$. Leur produit tend donc vers zéro :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

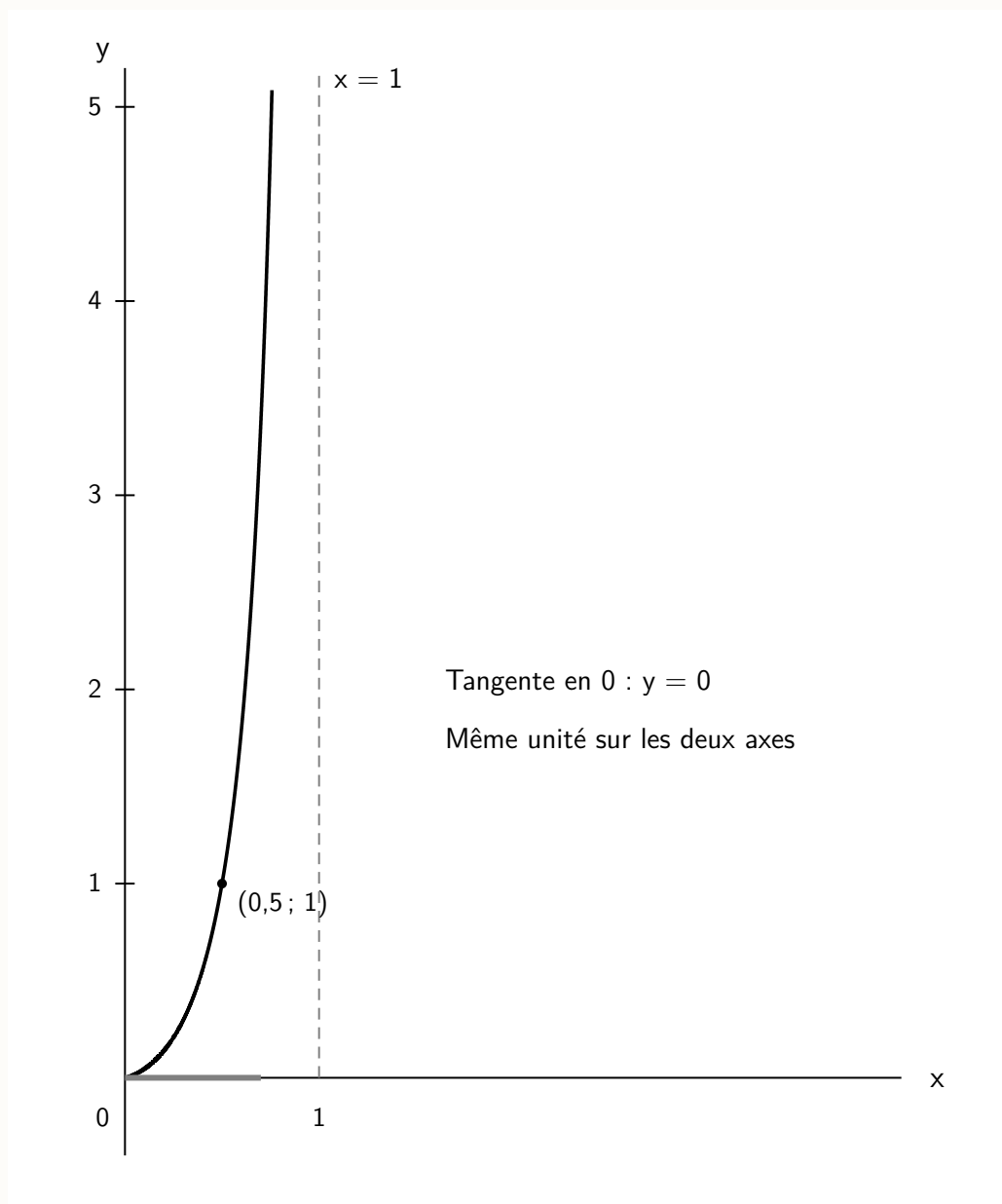
Le prolongement continu existe, et il est défini par $f(0) = 0$.

3. b) On calcule directement le taux d'accroissement à droite, sans utiliser de théorème de prolongement de la dérivée :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1-x)}{x} \frac{1}{\ln x}.$$

La dérivabilité de $t \mapsto \ln(1 - t)$ en zéro donne $\ln(1 - x)/x \rightarrow -1$, et $1/\ln x \rightarrow 0$. Le produit tend vers zéro. Le prolongement est donc dérivable à droite en zéro et $f'(0) = 0$; sa tangente est l'axe d'équation $y = 0$.

4. Lorsque $x \rightarrow 1^-$, les deux quantités $-\ln(1 - x)$ et $-1/\ln x$ sont positives et tendent vers $+\infty$. Leur produit est $f(x)$, d'où $f(x) \rightarrow +\infty$. La droite $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe, du côté gauche.
5. La courbe part de l'origine avec une tangente horizontale, reste strictement au-dessus de l'axe des abscisses pour $0 < x < 1$, passe par $(1/2, 1)$ puisque $f(1/2) = 1$, et monte vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow 1^-$. Les variations et les comportements aux extrémités suffisent pour l'allure demandée; aucune propriété de convexité n'est nécessaire.



Partie B : Étude d'une suite

6. Posons $g_n(x) = x^n + x - 1$ pour $x \geq 0$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable, avec $g'_n(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$ pour $x > 0$. Pour $n = 1$, cette dérivée vaut 2 y compris en zéro ; pour $n \geq 2$, la dérivée à droite en zéro vaut 1. La fonction est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Comme $g_n(0) = -1$ et $g_n(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, le théorème de la bijection fournit un unique $u_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $g_n(u_n) = 0$.

7. On a $g_n(0) = -1 < 0$ et $g_n(1) = 1 > 0$. La continuité et la stricte croissance donnent $0 < u_n < 1$.

8. Pour $n = 1$, l'équation devient $2x - 1 = 0$, donc $u_1 = 1/2$.

Pour $n = 2$, les racines de $x^2 + x - 1$ sont $(-1 - \sqrt{5})/2$ et $(-1 + \sqrt{5})/2$. Seule la seconde est positive, donc $u_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$.

9. a) Code adapté en Python. On maintient un intervalle $[a, b]$ contenant u_n ; le signe de $g_n(c)$, avec $c = (a + b)/2$, permet d'en conserver la moitié pertinente.

Python

```
def valeur_approchee(n):
    a = 0
    b = 1
    while b - a > 1e-3:
        c = (a + b) / 2
        if c**n + c - 1 > 0:
            b = c
        else:
            a = c
        u = (a + b) / 2
    return u
```

L'initialisation est valide par la question 7. Si $g_n(c) > 0$, la croissance de g_n impose $u_n < c$; sinon $u_n \geq c$. L'invariant $u_n \in [a, b]$ est ainsi conservé, même en cas d'égalité exacte. Après k passages, la largeur vaut 2^{-k} ; la boucle s'arrête donc après un nombre fini de passages. La valeur renvoyée est le milieu de l'intervalle final, et son erreur est au plus $(b - a)/2 \leq 5 \times 10^{-4} < 10^{-3}$. La boucle est exécutée au moins une fois, donc u est bien défini avant le retour.

9. b) Les points suggèrent que la suite est strictement croissante, converge, et a pour limite 1. Un graphique fini ne prouve aucune de ces affirmations; les questions suivantes les établissent.

10. a) La relation $u_n^n + u_n - 1 = 0$ donne $u_n^n = 1 - u_n$. Comme $0 < u_n < 1$, les logarithmes sont définis et $\ln u_n \neq 0$. En prenant le logarithme :

$$n \ln u_n = \ln(1 - u_n), \quad f(u_n) = \frac{\ln(1 - u_n)}{\ln u_n} = n.$$

10. b) Méthode 1 — Utiliser la stricte croissance de f

On a $f(u_{n+1}) = n + 1 > n = f(u_n)$. Si $u_{n+1} \leq u_n$, la croissance de f donnerait l'inégalité inverse. Ainsi $u_{n+1} > u_n$, pour tout $n \geq 1$.

Méthode 2 — Comparer les polynômes aux racines

La relation $u_n^n = 1 - u_n$ donne :

$$g_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n - 1 = u_n(1 - u_n) + u_n - 1 = -(1 - u_n)^2 < 0.$$

Or g_{n+1} est strictement croissante et s'annule en u_{n+1} . Il en résulte $u_n < u_{n+1}$. La première méthode exploite la fonction commune à tous les rangs ; la seconde compare directement deux équations successives et fonctionne sans avoir étudié f .

10. c) La suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une limite $\ell \in [1/2, 1]$.

Méthode 1 — Utiliser l'identité $f(u_n) = n$

Si $\ell < 1$, alors $\ell \in]0, 1[$ et f est continue en ℓ . On aurait $f(u_n) \rightarrow f(\ell) \in \mathbb{R}$, ce qui contredit $f(u_n) = n \rightarrow +\infty$. Par conséquent $\ell = 1$.

Méthode 2 — Contrôler la puissance variable

Supposons encore $\ell < 1$. La monotonie donne $0 < u_n \leq \ell < 1$, donc $0 < u_n^n \leq \ell^n \rightarrow 0$. L'équation $u_n = 1 - u_n^n$ imposerait alors $u_n \rightarrow 1$, contradiction. Cette preuve contrôle explicitement le terme dont l'exposant dépend de n ; on ne remplace pas sans justification u_n^n par une puissance de la limite. Dans les deux cas, $u_n \rightarrow 1$.

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

11. a) La fonction F est polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, et en particulier sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$. Ses dérivées partielles premières sont :

$$\partial_1 F(x, y) = 2xy + 2x - 2 = 2x(y + 1) - 2, \quad \partial_2 F(x, y) = x^2 - y.$$

11. b) Un point critique vérifie simultanément $x(y + 1) = 1$ et $y = x^2$. En substituant la seconde égalité dans la première, on obtient $x^3 + x - 1 = 0$. La question 6 donne une unique solution positive $x = u_3$, puis $y = u_3^2 > 0$. Réciproquement, ce couple annule bien les deux dérivées. Le seul point critique de l'ouvert est donc (u_3, u_3^2) .

12. a) Les dérivées secondes sont $\partial_{1,1}^2 F(x, y) = 2y + 2$, $\partial_{1,2}^2 F(x, y) = \partial_{2,1}^2 F(x, y) = 2x$ et $\partial_{2,2}^2 F(x, y) = -1$. En notant $u = u_3$, on obtient :

$$H = \begin{pmatrix} 2u^2 + 2 & 2u \\ 2u & -1 \end{pmatrix}.$$

12. b) Cherchons les valeurs propres par les équations portant sur les coordonnées, sans déterminant. Pour un vecteur non nul (p, q) , l'égalité $H \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ s'écrit :

$$(2u^2 + 2 - \lambda)p + 2uq = 0, \quad 2up - (1 + \lambda)q = 0.$$

Comme $u > 0$, la seconde égalité impose $p = (1 + \lambda)q/(2u)$; si $q = 0$, elle entraînerait aussi $p = 0$, ce qui est exclu. En substituant et en divisant par q , on obtient :

$$(2u^2 + 2 - \lambda)(1 + \lambda) + 4u^2 = 0,$$

$$\text{soit } \lambda^2 - (2u^2 + 1)\lambda - 6u^2 - 2 = 0.$$

Réciproquement, chaque racine de ce trinôme donne un vecteur propre non nul $\begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 2u \end{pmatrix}$: la seconde équation est identiquement satisfaite et la première est précisément l'équation obtenue. Le discriminant du trinôme vaut $(2u^2 + 1)^2 + 4(6u^2 + 2) > 0$. Il a donc deux racines réelles distinctes, exactement les deux valeurs propres de H . Les relations entre coefficients et racines du trinôme donnent $\lambda_1 \lambda_2 = -6u^2 - 2 < 0$.

- 13.** Les deux valeurs propres de la hessienne au seul point critique sont non nulles et de signes opposés. Le critère du programme s'applique, puisque F est C^2 sur un ouvert contenant ce point : (u_3, u_3^2) est un point selle et n'est pas un extremum local. Un extremum local en tout autre point de l'ouvert imposerait aussi l'annulation du gradient, ce qui est impossible par la question 11. Ainsi F n'admet aucun extremum local sur $]0, +\infty[^2$.

Exercice 2

- 1. a)** Posons $U = M(1, 0)$ et $V = M(0, 1)$. On a $M(a, b) = aU + bV$, donc $E = \text{Vect}(U, V)$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Si $aU + bV = 0$, le coefficient en position $(1, 1)$ donne $a = 0$ et celui en position $(4, 1)$ donne $b = 0$. La famille (U, V) est libre ; c'est donc une base de E et $\dim E = 2$.

- 1. b)** Il suffit d'un contre-exemple pour tester la stabilité. Avec les matrices précédentes, le produit est :

$$UV = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son coefficient en position $(1, 2)$ vaut 1, alors que cette position vaut toujours zéro pour une matrice de E . Ainsi $UV \notin E$: le produit de deux matrices de E n'appartient pas nécessairement à E .

2. La matrice $M(0, 0)$ est la matrice nulle. Elle est déjà diagonale, donc diagonalisable, avec par exemple $P = I_4$ et $D = 0$.
3. a) Pour toute colonne $X = {}^t(x, y, z, t)$, on a $AX = a(x + t){}^t(1, 1, 1, 0)$. Comme ${}^t(A(1, 1, 1, 0)) = {}^t(a(1, 1, 1, 0))$, on obtient $A^2X = aAX$ pour tout X . Par conséquent :

$$A^2 = aA = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme $Q(s) = s^2 - as = s(s - a)$ est donc annulateur de A .

3. b) Toute valeur propre de A est racine de Q , donc appartient à $\{0, a\}$. Les deux valeurs se réalisent.

Pour zéro, $AX = 0$ équivaut à $x + t = 0$, puisque $a \neq 0$. Ainsi :

$$\text{Ker } A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ces trois vecteurs sont libres car leurs deuxième, troisième et quatrième coordonnées isolent leurs coefficients.

Pour a , l'équation $AX = aX$ équivaut à $X = (x + t)^t(1, 1, 1, 0)$, ce qui impose $t = 0$ et $x = y = z$. Le sous-espace propre est donc engendré par ${}^t(1, 1, 1, 0)$. En conclusion, les valeurs propres sont 0 et a , avec des sous-espaces propres de dimensions respectives 3 et 1.

3. c) Les familles précédentes réunissent quatre vecteurs propres indépendants, puisque les deux valeurs propres sont distinctes. Elles forment une base de $\mathbb{R}^4$. On peut prendre :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(a, 0, 0, 0).$$

Les colonnes de P étant une base, P est inversible. Leur propriété de vecteurs propres donne $AP = PD$, d'où $A = PDP^{-1}$; la diagonalisation est justifiée sans aucun critère supplémentaire sur les polynômes annulateurs.

4. a) La matrice B a ses trois premières lignes nulles et sa dernière ligne égale à (b, b, b, b) , non nulle. Ainsi $\text{rg } B = 1$.

D'autre part :

$$B - bI_4 = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ b & b & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses trois premières colonnes sont libres : une relation entre elles donne successivement, dans les trois premières coordonnées, l'annulation des trois coefficients. La quatrième est nulle, donc $\text{rg}(B - bI_4) = 3$.

4. b) Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker } B = 4 - 1 = 3$ et $\dim \text{Ker}(B - bI_4) = 4 - 3 = 1$. Les valeurs 0 et b sont donc propres.

Il ne peut pas y en avoir d'autres : si $BX = \lambda X$ avec $\lambda \neq 0$, les trois premières coordonnées donnent $x = y = z = 0$. Le vecteur X étant non nul, $t \neq 0$, et la dernière coordonnée donne $bt = \lambda t$, donc $\lambda = b$.

On peut préciser $\text{Ker } B = \{ {}^t(x, y, z, t) : x + y + z + t = 0 \}$ et le sous-espace propre de b est la droite engendrée par ${}^t(0, 0, 0, 1)$.

4. c) Les sous-espaces propres associés aux deux valeurs propres distinctes ont des dimensions dont la somme vaut $3 + 1 = 4$. Leurs bases réunies constituent donc une base de vecteurs propres : B est diagonalisable. Une base possible est $((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1), (0, 0, 0, 1))$, où les trois premiers vecteurs sont associés à zéro et le dernier à b .

5. a) Pour $w = (x, y, z, t)$, on a :

$$f(w) = a(x + t)v_1 + b(x + y + z + t)v_2.$$

Les vecteurs v_1, v_2 sont libres et a, b sont non nuls. Ainsi $f(w) = 0$ équivaut à $x + t = 0$ et $x + y + z + t = 0$, soit $t = -x$ et $z = -y$.

Par conséquent $w = x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, -1, 0)$. On choisit $v_3 = (1, 0, 0, -1)$ et $v_4 = (0, 1, -1, 0)$. Ils sont libres, comme le montrent leurs première et deuxième coordonnées. C'est une base de $\text{Ker } f$, de dimension 2.

5. b) Considérons une relation $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 = 0$. Ses coordonnées sont :

$$\alpha + \gamma = 0, \quad \alpha + \delta = 0, \quad \alpha - \delta = 0, \quad \beta - \gamma = 0.$$

La somme des deuxième et troisième égalités donne $2\alpha = 0$, puis $\delta = 0$, $\gamma = 0$ et $\beta = 0$. La famille est libre et possède quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^4$; c'est donc une base.

5. c) La formule de la question 5a donne $f(v_1) = av_1 + 3bv_2$, $f(v_2) = av_1 + bv_2$, et $f(v_3) = f(v_4) = 0$. Les coordonnées de ces quatre images forment les colonnes de :

$$N = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 3b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. d) On a $NX = {}^t(ax + ay, 3bx + by, 0, 0)$. Si $NX = \lambda X$ avec $\lambda \neq 0$, les deux dernières coordonnées donnent $z = t = 0$, puis les deux premières donnent $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Le couple (x, y) est non nul, sinon X serait nul.

Réciproquement, si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T pour λ et si $z = t = 0$, les quatre coordonnées vérifient $NX = \lambda X$, avec $X \neq 0$. L'équivalence est établie dans les deux sens.

5. e) Ici $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Cherchons un vecteur propre (x, y) : la première équation donne

$y = (\lambda - 1)x$. Si $x = 0$, on aurait aussi $y = 0$, donc $x \neq 0$. La seconde équation devient $3x + y = \lambda y$, puis $3 = (\lambda - 1)^2$.

Les deux valeurs possibles sont $\lambda_- = 1 - \sqrt{3}$ et $\lambda_+ = 1 + \sqrt{3}$. Réciproquement, les vecteurs $(1, -\sqrt{3})$ et $(1, \sqrt{3})$ conviennent respectivement : ce sont bien deux valeurs propres distinctes et non nulles.

La matrice N admet alors les vecteurs propres $(1, -\sqrt{3}, 0, 0)$ et $(1, \sqrt{3}, 0, 0)$, ainsi que les deux derniers vecteurs de la base canonique, associés à zéro. Ils sont indépendants : les deux premiers le sont par leurs valeurs propres distinctes, et leurs deux dernières coordonnées sont nulles. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^4$. Ainsi N est diagonalisable, et $M(1, 1)$, qui représente le même endomorphisme dans une autre base, l'est aussi.

5. f) Ici $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Si (x, y) était un vecteur propre pour un réel λ , la première équation donnerait $y = (\lambda - 1)x$ avec $x \neq 0$. La seconde donnerait :

$$-3x - y = \lambda y, \quad -3 - (\lambda - 1) = \lambda(\lambda - 1),$$

soit $\lambda^2 + 2 = 0$. Cette égalité n'a aucune solution réelle. La matrice T n'a donc aucune valeur propre dans le cadre réel de l'exercice.

Par 5d, N n'a aucune valeur propre non nulle ; son sous-espace propre pour zéro est de dimension 2 par 5a. Il n'existe donc pas de base de quatre vecteurs propres et N n'est pas diagonalisable. Il en va de même pour $M(1, -1)$.

5. g) Pour tous $a, b \neq 0$, les équations $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se traitent sans calcul de déterminant. La première donne $ay = (\lambda - a)x$. On a $x \neq 0$, sinon $y = 0$. En substituant dans la seconde et en multipliant par a/x , on obtient :

$$3ab + b(\lambda - a) = \lambda(\lambda - a),$$

soit $q(\lambda) = \lambda^2 - (a + b)\lambda - 2ab = 0$.

Réciproquement, pour chaque racine réelle λ de q , le vecteur $(a, \lambda - a)$ est non nul et vérifie les deux équations, donc il est propre. L'ensemble des valeurs propres de T est exactement l'ensemble des racines réelles de ce trinôme. Son discriminant est :

$$\Delta = (a + b)^2 + 8ab = a^2 + 10ab + b^2.$$

De plus, $q(0) = -2ab \neq 0$, donc zéro n'est jamais valeur propre de T .

Si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines réelles distinctes et non nulles. Comme en 5e, leurs vecteurs propres prolongés par deux coordonnées nulles, réunis avec les deux derniers vecteurs canoniques associés à zéro, forment une base de vecteurs propres de N . Donc $M(a, b)$ est diagonalisable.

Si $\Delta < 0$, T n'a aucune valeur propre ; les seuls vecteurs propres de N appartiennent à son noyau, de dimension 2. Donc $M(a, b)$ n'est pas diagonalisable.

Enfin, si $\Delta = 0$, T n'a qu'une valeur propre $\lambda_0 = (a + b)/2$, non nulle. Pour cette valeur, l'égalité $ay = (\lambda_0 - a)x$ montre que son sous-espace propre est exactement la droite engendrée par $(a, \lambda_0 - a)$: il est de dimension 1. L'équivalence de 5d montre que le sous-espace propre correspondant de N est aussi de dimension 1. Avec le noyau de dimension 2, on ne dispose que de trois directions propres indépendantes, donc d'aucune base propre de $\mathbb{R}^4$. La matrice n'est pas diagonalisable.

En réunissant les trois cas, $M(a, b)$ est diagonalisable si et seulement si $a^2 + 10ab + b^2 > 0$, sous les hypothèses $a, b \neq 0$ de cette question. Les cas où l'un des paramètres est nul ont déjà été traités séparément.

Exercice 3

Partie A : Loi de Pareto

1. La fonction f est positive et continue sur chacun des intervalles $] -\infty, b[$ et $]b, +\infty[$. Ses limites à gauche et à droite en b sont respectivement 0 et a/b , toutes deux finies ; elle est donc dans le cadre des densités du programme.

Pour $R > b$, une primitive donne :

$$\int_b^R \frac{ab^a}{x^{a+1}} dx = \left[-\frac{b^a}{x^a} \right]_b^R = 1 - \left(\frac{b}{R} \right)^a.$$

Comme $a > 0$, cette quantité tend vers 1 lorsque $R \rightarrow +\infty$. La fonction est nulle à gauche de b , donc son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1 : c'est une densité de probabilité.

2. Pour $x < b$, on a $F_X(x) = 0$. Pour $x \geq b$, le calcul précédent, avec $R = x$, donne :

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{b}{x} \right)^a.$$

Ainsi $F_X(x) = 0$ sur $] -\infty, b[$ et $F_X(x) = 1 - (b/x)^a$ sur $[b, +\infty[$. La valeur en b est zéro, et la fonction est continue sur tout $\mathbb{R}$.

3. a) Posons $Y = bU^{-1/a}$. Puisque $0 < U < 1$ presque sûrement, $Y > b$ presque sûrement. Pour $x < b$, $P(Y \leq x) = 0$. Pour $x \geq b$, les puissances de nombres positifs donnent :

$$\{bU^{-1/a} \leq x\} = \{U \geq (b/x)^a\}.$$

La loi uniforme, qui n'a pas d'atome, donne alors $P(Y \leq x) = 1 - (b/x)^a$. Cette fonction de répartition est celle de la question 2. Donc Y suit la loi de Pareto de paramètres a, b .

3. b) Code adapté en Python. Si V est uniforme sur $[0, 1[$, $1 - V$ a la même loi uniforme continue sur l'intervalle unité, à ses extrémités de probabilité nulle près. En calcul numérique, la valeur `1 - rd.random()` est strictement positive et permet d'éviter une puissance négative de zéro.

Python

```
import numpy.random as rd

def pareto(a, b):
    u = 1 - rd.random()
    return b * u**(-1 / a)
```

Les paramètres sont supposés strictement positifs, comme dans l'énoncé. La variable locale u simule la variable uniforme ; la valeur renvoyée simule $bU^{-1/a}$, donc la loi recherchée.

3. c) Code adapté en Python. La liste possède cinq composantes. Pour chaque entier p de 2 à 6, on simule 10^p réalisations indépendantes de la loi de Pareto de paramètres a, b et on en calcule la moyenne empirique. Les échantillons utilisés pour les différentes composantes sont nouveaux ; ce ne sont pas les moyennes successives d'un même échantillon emboîté.

Le code complet, utilisable indépendamment du bloc précédent, est :

Python

```
import numpy.random as rd

def pareto(a, b):
    u = 1 - rd.random()
    return b * u**(-1 / a)

def mystere(a, b):
    L = []
    for p in range(2, 7):
        S = 0
```

```
for k in range(10**p):
    S = S + pareto(a, b)
L.append(S / 10**p)
return L
```

La borne supérieure exclusive de $\text{range}(2, 7)$ inclut bien les cinq exposants demandés. La boucle intérieure effectue exactement 10^p additions ; S est remis à zéro au début de chaque échantillon et `append` conserve les cinq moyennes dans leur ordre.

3. d) Les deux premières listes semblent se stabiliser respectivement vers 2 et 3. Le calcul de la question 4 confirmera que les lois correspondantes admettent des espérances égales à $2 \times 1/(2-1) = 2$ et $3 \times 2/(3-1) = 3$. Les observations sont donc compatibles avec une approximation de ces espérances par les moyennes empiriques.

La troisième liste, pour $a = 1, b = 4$, présente de fortes fluctuations et des valeurs très grandes. La question 4 montrera que cette loi n'admet pas d'espérance finie ; on ne peut donc pas interpréter les composantes comme des approximations d'une espérance finie.

Ces trois listes sont des observations numériques, pas des preuves de convergence ou de divergence. Pour $a = 3$, la variance sera finie et la loi faible des grands nombres du programme s'applique. Pour $a = 2$, la variance est infinie : ce résultat de cours, dans sa version à variance finie, ne justifie pas les observations, et on ne l'invoque pas dans ce cas.

4. a) Comme X est positive, l'existence de son espérance équivaut à la convergence de l'intégrale positive $ab^a \int_b^{+\infty} x^{-a} dx$.

Si $a \neq 1$, pour $R > b$ cette intégrale tronquée vaut $ab^a(R^{1-a} - b^{1-a})/(1-a)$. Elle a une limite finie si et seulement si $1-a < 0$, soit $a > 1$. Pour $a = 1$, elle vaut $b \ln(R/b)$ et diverge. Pour $0 < a < 1$, le terme R^{1-a} tend vers $+\infty$, et l'intégrale diverge également.

Lorsque $a > 1$, elle est absolument convergente et :

$$E(X) = ab^a \frac{b^{1-a}}{a-1} = \frac{ab}{a-1}.$$

4. b) Le second moment existe si et seulement si $ab^a \int_b^{+\infty} x^{1-a} dx$ converge. Pour $a \neq 2$, la primitive est $ab^a x^{2-a}/(2-a)$; pour $a = 2$, l'intégrale tronquée vaut $2b^2 \ln(R/b)$. Le même examen donne la convergence exactement lorsque $a > 2$.

Dans ce cas $E(X^2) = ab^2/(a-2)$ et l'espérance de X existe aussi. Par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = \frac{ab^2}{a-2} - \frac{a^2 b^2}{(a-1)^2} = \frac{ab^2((a-1)^2 - a(a-2))}{(a-1)^2(a-2)} = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}.$$

Si $a \leq 1$, l'espérance n'existe pas, donc la variance n'est pas définie. Si $1 < a \leq 2$, l'espérance existe mais le second moment diverge, donc il n'y a pas de variance finie. La condition cherchée est ainsi bien $a > 2$.

Partie B : Estimation du paramètre b

5. a) Pour $x \geq b$, l'événement $\{Y_n > x\}$ est l'intersection des événements $\{X_i > x\}$, pour $1 \leq i \leq n$. L'indépendance et l'identité des lois donnent :

$$P(Y_n > x) = \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = \left(\frac{b^3}{x^3}\right)^n = \left(\frac{b}{x}\right)^{3n}.$$

5. b) Pour $x < b$, on a $Y_n \geq b$ presque sûrement et $F_{Y_n}(x) = 0$. Pour $x \geq b$, la question précédente donne $F_{Y_n}(x) = 1 - (b/x)^{3n}$. La comparaison avec la question 2 montre que Y_n suit une loi de Pareto de paramètres $3n$ et b .
5. c) Question adaptée au programme actuel : les notions de biais et de risque quadratique ont été définies dans le préambule de la partie B; seul leur calcul

concret est utilisé ici.

Puisque $3n \geq 3 > 2$, Y_n possède une espérance et une variance. Les formules de la partie A donnent :

$$E(Y_n) = \frac{3nb}{3n-1}, \quad V(Y_n) = \frac{3nb^2}{(3n-1)^2(3n-2)}.$$

Le facteur $(3n-1)/(3n)$ est déterministe et défini pour tout $n \geq 1$. Ainsi :

$$E(Y'_n) = \frac{3n-1}{3n} \frac{3nb}{3n-1} = b.$$

C'est donc un estimateur sans biais de b . Son risque, défini comme $E((Y'_n - b)^2)$, est sa variance :

$$R(Y'_n) = V(Y'_n) = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 \frac{3nb^2}{(3n-1)^2(3n-2)} = \frac{b^2}{3n(3n-2)}.$$

Tous les dénominateurs sont strictement positifs, y compris pour $n = 1$.

6. a) Avec $a = 3$, les formules de la partie A donnent $E(X_i) = 3b/2$ et $V(X_i) = 3b^2/4$, finies pour chacun des n termes. La linéarité de l'espérance et l'indépendance pour la variance conduisent à :

$$E(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{3b}{2} = \frac{3b}{2}, \quad V(Z_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{3b^2}{4} = \frac{3b^2}{4n}.$$

6. b) Question adaptée au programme actuel : on emploie les définitions concrètes données dans le préambule de B.

La condition $E(\alpha Z_n) = b$ devient $\alpha(3b/2) = b$. Comme $b > 0$, elle impose $\alpha = 2/3$.

L'estimateur $Z'_n = (2/3)Z_n$ est sans biais et son risque est :

$$R(Z'_n) = V(Z'_n) = \frac{4}{9} \frac{3b^2}{4n} = \frac{b^2}{3n}.$$

7. Question adaptée au programme actuel : la comparaison porte sur le risque quadratique défini dans B , sans recours à une théorie générale de l'estimation.

Les deux estimateurs sont sans biais. Leur rapport de risques vaut $R(Y'_n)/R(Z'_n) = 1/(3n - 2)$. Pour $n > 1$, ce rapport est strictement inférieur à 1 : on choisit Y'_n au sens du risque quadratique, car son erreur quadratique moyenne est plus petite. Pour $n = 1$, les risques sont égaux à $b^2/3$, et les estimateurs coïncident : $Y'_1 = Z'_1 = (2/3)X_1$. Il n'y a alors pas de préférence entre eux pour ce critère.

Partie C : Estimation du paramètre a

8. On sait que $X_n \geq 1$ presque sûrement. Donc $W_n = \ln X_n \geq 0$. Pour $w < 0$, $F_{W_n}(w) = 0$. Pour $w \geq 0$, la stricte croissance du logarithme donne :

$$F_{W_n}(w) = P(X_n \leq e^w) = 1 - \frac{1}{(e^w)^a} = 1 - e^{-aw}.$$

C'est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $a > 0$. Ainsi W_n suit cette loi ; son espérance et sa variance existent et valent $E(W_n) = 1/a$ et $V(W_n) = 1/a^2$.

9. a) Les variables W_n sont indépendantes : ce sont des fonctions des variables indépendantes X_n ; le lemme des coalitions s'applique. Elles ont la même loi exponentielle de paramètre a , donc une espérance $m = 1/a$ et une variance $\sigma^2 = 1/a^2$ finie et strictement positive. Comme $a > 0$, leur écart-type est $\sigma = 1/a$.

Le théorème limite central du programme, dont la conclusion est admise après vérification de ces hypothèses, donne :

$$\frac{\sqrt{n}(M_n - m)}{\sigma} = \sqrt{n}(aM_n - 1) = T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

9. b) La loi de X_i est continue, donc $P(X_i = 1) = 0$. Ainsi $W_i > 0$ presque sûrement, et $M_n > 0$ presque sûrement. Les deux bornes de l'intervalle sont donc définies presque sûrement ; on peut attribuer une valeur arbitraire à l'intervalle sur l'événement nul $\{M_n = 0\}$.

Sur $\{M_n > 0\}$, multiplier les deux inégalités définissant l'appartenance de a à l'intervalle par $\sqrt{n}M_n > 0$ donne exactement :

$$\frac{\sqrt{n} - 2}{\sqrt{n}M_n} \leq a \leq \frac{\sqrt{n} + 2}{\sqrt{n}M_n} \iff -2 \leq \sqrt{n}(aM_n - 1) \leq 2.$$

Le théorème limite central, appliqué à l'intervalle fixe $[-2, 2]$ dont les extrémités sont des points de continuité de la fonction de répartition normale, entraîne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(a \in \left[\frac{\sqrt{n} - 2}{\sqrt{n}M_n}, \frac{\sqrt{n} + 2}{\sqrt{n}M_n} \right] \right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \geq 0,95.$$

Il s'agit donc d'un intervalle de confiance asymptotique de niveau au moins 95%. La constante 2 donne une couverture limite légèrement supérieure à 95%, sans prétendre à une égalité exacte. Pour les petits échantillons $n < 4$, la borne inférieure est négative, et pour $n = 4$ elle est nulle ; cela ne compromet pas l'appartenance du paramètre $a > 0$. On peut aussi intersecter l'intervalle avec $]0, +\infty[$ sans modifier sa couverture pour ce paramètre.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 9a et exercice 3, questions 3b à 3d : Code adapté en Python. Les boucles, les valeurs renvoyées et les cinq sorties numériques de l'énoncé ont été conservées ; les commandes aléatoires utilisées sont documentées. La simulation uniforme est prise strictement positive pour éviter une puissance négative de zéro.

Exercice 1, question 9b : La figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. Les graduations ont servi à calibrer les axes ; les cinquante ordonnées sont calculées à partir des équations définissant exactement les termes, sans attribuer de précision exacte à une mesure de pixels.

Exercice 3, partie B, questions 5c, 6b et 7 : les définitions de « sans biais » et de « risque quadratique » ont été ajoutées au préambule pour conserver intégralement les questions d'estimation anciennes en les ramenant aux calculs d'espérance et de variance autorisés.