



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques — Option économique

2019

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie A : Des résultats préliminaires

1. a) Une fonction de répartition prend ses valeurs dans $[0, 1]$: $0 \leq F_U(t) \leq 1$. Une densité est positive ou nulle, donc $f_V(t) \geq 0$. La multiplication de l'encadrement par $f_V(t)$ conserve les inégalités et donne, pour tout $t \geq 0$,

$$0 \leq F_U(t)f_V(t) \leq f_V(t).$$

1. b) La fonction F_U est continue, puisque U est à densité, et f_V est continue sur $[0, +\infty[$ par hypothèse. Leur produit est donc continu sur cet intervalle.

Comme f_V est une densité nulle sur $] -\infty, 0[$, son intégrale sur $[0, +\infty[$ converge et vaut

1. L'encadrement de la question précédente et le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives montrent alors que

$$\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t) dt$$

converge. Sa valeur appartient à $[0, 1]$.

Le résultat admis dans l'énoncé est $\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t) dt = P(U \leq V)$. Il permet de relier cette intégrale à la comparaison des deux variables indépendantes ; il sera utilisé à la question suivante.

2. L'événement $[U > V]$ est le complémentaire de $[U \leq V]$. Par le résultat admis et la normalisation de f_V ,

$$P(U > V) = 1 - \int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t) dt = \int_0^{+\infty} f_V(t) dt - \int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t) dt.$$

Les deux intégrales de la différence sont convergentes. La linéarité donne donc

$$P(U > V) = \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t)) f_V(t) dt.$$

L'intégrande est positif et majoré par f_V , ce qui vérifie aussi directement sa convergence.

3. a) Pour $t \geq 0$, les formules des lois exponentielles sont

$$F_U(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad f_V(t) = \mu e^{-\mu t}.$$

On choisit ici la valeur $f_V(0) = \mu$, ce qui rend la densité continue sur $[0, +\infty[$ comme demandé. La valeur d'une densité en un seul point ne change pas la loi.

3. b) On applique la question 2, dont les hypothèses sont satisfaites : U et V sont indépendantes et leurs densités exponentielles sont nulles sur les réels négatifs et continues à droite de 0.

$$P(U > V) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t} dt = \mu \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} dt.$$

Sur $[0, R]$, une primitive est $-\frac{1}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$. Comme $\lambda + \mu > 0$, l'exponentielle tend vers 0 lorsque $R \rightarrow +\infty$. Ainsi

$$P(U > V) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Partie B : Une application

4. a) Pour $t \geq 0$, l'événement $[M_n > t]$ est l'intersection des événements $[T_j > t]$, pour $1 \leq j \leq n$. L'indépendance des variables implique celle de ces événements. Par conséquent,

$$P(M_n > t) = \prod_{j=1}^n P(T_j > t) = \prod_{j=1}^n e^{-\lambda t} = e^{-n\lambda t}.$$

4. b) Les variables T_j sont positives presque sûrement. Pour $t < 0$, on a donc $P(M_n \leq t) = 0$. Pour $t \geq 0$, la question précédente donne

$$F_{M_n}(t) = 1 - P(M_n > t) = 1 - e^{-n\lambda t}.$$

Ainsi

$$F_{M_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

C'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$, paramètre strictement positif. On conclut que M_n suit cette loi.

5. a) Par la définition du premier indice satisfaisant l'inégalité, $[N = 1] = [T_1 \leq T_0]$.

Méthode 1 — Utiliser la comparaison des exponentielles

La question 3b, appliquée à $U = T_1$ et $V = T_0$ avec les deux paramètres égaux à λ , donne $P(T_1 > T_0) = 1/2$. En passant au complémentaire,

$$P(N = 1) = P(T_1 \leq T_0) = \frac{1}{2}.$$

Méthode 2 — Utiliser la symétrie du couple

Les variables T_0 et T_1 sont indépendantes et de même loi ; le couple a donc la même loi après échange des deux coordonnées. Il en résulte $P(T_1 < T_0) = P(T_0 < T_1)$.

Pour vérifier que l'égalité a une probabilité nulle sans supposer de résultat supplémentaire sur les couples à densité, fixons $\delta > 0$ et partageons $[0, +\infty[$ en intervalles $I_k = [k\delta, (k+1)\delta[$, pour $k \in \mathbb{N}$. Si les deux variables sont égales et positives, elles appartiennent à un même intervalle. Par indépendance et par la formule

exponentielle, en posant $p_k = P(T_0 \in I_k)$, on a

$$P(T_0 = T_1) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} p_k^2 \leq (1 - e^{-\lambda\delta}) \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1 - e^{-\lambda\delta}.$$

En effet $p_k = e^{-\lambda k\delta}(1 - e^{-\lambda\delta}) \leq 1 - e^{-\lambda\delta}$ et la somme des p_k vaut 1. En faisant tendre δ vers 0, on obtient $P(T_0 = T_1) = 0$. Les deux probabilités strictes, égales et de somme 1, valent donc $1/2$, puis $P(T_1 \leq T_0) = 1/2$.

La première méthode réutilise immédiatement le résultat préparatoire ; la seconde explique le rôle de la symétrie et de l'absence d'égalité avec probabilité positive.

5. b) Question adaptée au programme actuel : rectification de l'égalité d'événements du sujet source, qui omettait le cas $N = 0$. Il faut conserver ce cas tant que sa probabilité n'a pas été déterminée.

Pour une issue donnée, $M_n > T_0$ signifie qu'aucun des indices $1, \dots, n$ ne vérifie $T_k \leq T_0$. Deux possibilités, incompatibles, restent alors : un premier indice existe après n , ce qui signifie $N > n$, ou aucun indice n'existe, ce qui signifie $N = 0$. Réciproquement, chacune de ces possibilités implique $M_n > T_0$. Ainsi

$$[M_n > T_0] = [N > n] \cup [N = 0],$$

avec une union disjointe.

La variable M_n est une fonction des variables $T_1, \dots, T_n$, tandis que T_0 en est indépendante. Le lemme des coalitions assure donc l'indépendance de M_n et de T_0 . Leurs lois sont exponentielles de paramètres respectifs $n\lambda$ et λ . La question 3b donne

$$P(M_n > T_0) = \frac{\lambda}{n\lambda + \lambda} = \frac{1}{n + 1}.$$

En utilisant l'union disjointe, on conclut

$$P(N > n) + P(N = 0) = \frac{1}{n + 1}.$$

5. c) Pour $n \geq 2$, l'événement $[N > n - 1]$ est l'union disjointe de $[N = n]$ et de $[N > n]$. La formule de 5b s'applique aux entiers $n - 1$ et n ; le terme $P(N = 0)$ disparaît dans

leur différence :

$$P(N = n) = P(N > n - 1) - P(N > n) = \left(\frac{1}{n} - P(N = 0) \right) - \left(\frac{1}{n+1} - P(N = 0) \right).$$

Par conséquent,

$$\forall n \geq 2, \quad P(N = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

La démonstration ne présuppose pas que $N = 0$ est de probabilité nulle.

5. d) La variable N prend par définition ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $m \geq 2$, les résultats précédents donnent

$$\sum_{n=1}^m P(N = n) = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^m \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{m+1}.$$

La somme des probabilités pour $n \geq 1$ vaut donc 1. Par la formule des probabilités totales sur les valeurs de N ,

$$P(N = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) = 0.$$

On peut désormais simplifier le résultat de 5b en $P(N > n) = 1/(n+1)$ pour $n \geq 1$. L'égalité des événements imprimée dans le sujet source n'était cependant pas une égalité ensembliste : elle n'est valable qu'à un événement de probabilité nulle près.

6. Méthode 1 — Examiner la série définissant l'espérance

La variable N est positive ou nulle. Elle admet une espérance finie si et seulement si la

série

$$\sum_{n \geq 0} nP(N = n)$$

converge. Pour $n \geq 2$,

$$nP(N = n) = \frac{1}{n+1}.$$

La série de ces termes est une série harmonique dont on a retiré un nombre fini de termes ; elle diverge. Ce critère de série de référence intervient ici dans l'étude d'une variable aléatoire discrète, cadre prévu par le programme. Ainsi N n'admet pas d'espérance finie ; la somme positive correspondant à son espérance vaut $+\infty$.

Méthode 2 — Compter les niveaux atteints par une variable tronquée

Pour tout entier $m \geq 1$ et toute valeur entière positive ou nulle de N , on a l'identité finie

$$\min(N, m) = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{1}_{[N > k]},$$

où $\mathbf{1}_{[N > k]}$ vaut 1 lorsque $N > k$ et 0 sinon. En effet, le nombre d'entiers $k \in \{0, \dots, m-1\}$ strictement inférieurs à N est exactement $\min(N, m)$.

Cette variable est bornée et possède donc une espérance. La linéarité pour une somme finie donne

$$E(\min(N, m)) = \sum_{k=0}^{m-1} P(N > k) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{j},$$

car $P(N > 0) = 1$ et les autres probabilités sont connues. Les sommes harmoniques tendent vers $+\infty$. Si N avait une espérance finie, l'inégalité $0 \leq \min(N, m) \leq N$

imposerait $E(\min(N, m)) \leq E(N)$ pour tout m , ce qui est impossible. On retrouve donc l'absence d'espérance finie.

La première méthode utilise directement la loi ; la seconde montre que la lente décroissance des probabilités de dépassement suffit à empêcher une espérance finie. Elle ne fait intervenir aucune permutation de sommes infinies.

Exercice 2

Partie A : Premier exemple

1. La matrice A est triangulaire supérieure. On peut retrouver ses valeurs propres sans aucun déterminant : si $AX = \alpha X$ avec $X \neq 0$ et si j est le plus grand indice d'une coordonnée non nulle de X , la ligne j donne $a_{jj}x_j = \alpha x_j$. Donc α est l'un des coefficients diagonaux 1, 1/2 ou 2.

Ces trois valeurs sont effectivement propres, car

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les trois vecteurs, associés à des valeurs propres distinctes, sont indépendants. Ils forment une base de $\mathbb{R}^3$: A est donc diagonalisable. Comme 0 n'est pas valeur propre, son noyau est réduit à $\{0\}$; c'est une matrice carrée, donc elle est inversible.

2. On range les vecteurs propres dans l'ordre croissant de leurs valeurs propres :

$$D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de P constituent la base propre précédente, donc P est inversible. Les trois relations de la question 1 se regroupent en $AP = PD$, ce qui donne $A = PDP^{-1}$.

On peut aussi vérifier explicitement l'inverse : résoudre $(x, y, z) = (2a + b + c, a, c)$ donne $a = y$, $b = x - 2y - z$ et $c = z$. Ainsi

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients diagonaux de D sont non nuls ; son inverse est

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

3. L'application matricielle définie par Q échange la première et la troisième coordonnées et conserve la deuxième. Appliquer deux fois cet échange rend les coordonnées initiales : $Q^2 = I_3$. Le produit direct donne également cette identité.

Dans QDQ , la multiplication à droite échange les colonnes extrêmes, puis la

multiplication à gauche échange les lignes extrêmes. On obtient donc

$$QDQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = D^{-1}.$$

4. Posons $R = PQP^{-1}$. Cette matrice est inversible, produit de matrices inversibles, et $R^{-1} = PQ^{-1}P^{-1} = PQP^{-1} = R$ puisque $Q^2 = I_3$.

Les produits se simplifient alors comme suit :

$$R^{-1}AR = PQP^{-1}PDP^{-1}PQP^{-1} = PQDQP^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = A^{-1}.$$

La dernière égalité vient de l'inversion de $A = PDP^{-1}$; on peut vérifier que $(PD^{-1}P^{-1})A = A(PD^{-1}P^{-1}) = I_3$. Ainsi A et A^{-1} sont semblables. Une matrice réalisant la similitude est

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie B : Deuxième exemple

5. Les images des vecteurs de la base canonique sont $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ et $(0, -1, 2)$. Elles donnent les colonnes de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour établir l'inversibilité, résolvons ${}^t(M(x, y, z)) = {}^t(a, b, c)$. Les équations sont $x = a$, $-z = b$, $y + 2z = c$. Elles ont l'unique solution

$$(x, y, z) = (a, c + 2b, -b).$$

Toute colonne second membre a donc un unique antécédent, ce qui prouve l'inversibilité. On lit aussi

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. a) L'équation $f(x, y, z) = (x, y, z)$ équivaut à $-z = y$ et $y + 2z = z$, c'est-à-dire à la seule relation $y + z = 0$. Le sous-espace propre pour la valeur 1 est donc

$$E_1(f) = \{(x, y, -y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u_1, u_2).$$

Les vecteurs u_1 et u_2 sont indépendants : si $au_1 + bu_2 = 0$, la première coordonnée donne $a = 0$ et la deuxième $b = 0$. Ils constituent donc une base de ce sous-espace, qui contient des vecteurs non nuls. Cela confirme que 1 est une valeur propre.

6. b) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) - (x, y, z) = (0, -y - z, y + z).$$

Cette expression est égale à $u_2 = (0, 1, -1)$ si et seulement si $y + z = -1$. On peut choisir

$$u_3 = (0, -1, 0).$$

On vérifie $f(u_3) = (0, 0, -1) = u_2 + u_3$, donc $f(u_3) - u_3 = u_2$.

6. c) Avec ce choix, une combinaison linéaire nulle s'écrit

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = (a, b - c, -b) = (0, 0, 0).$$

La troisième coordonnée impose $b = 0$, la deuxième $c = 0$ et la première $a = 0$. Les trois vecteurs sont donc indépendants. Une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en est une base, d'où le résultat.

La propriété admise pour $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est conservée ; elle autorise le changement de base de la question suivante.

7. a) On connaît $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = u_2$ et $f(u_3) = u_2 + u_3$. Leurs colonnes de coordonnées dans $\mathcal{B}_1$ donnent

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathcal{B}_2$, on a $f(u_1) = u_1$, $f(-u_2) = -u_2$ et $f(u_3) = -(-u_2) + u_3$. Par conséquent,

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. b) Ces matrices représentent le même endomorphisme dans deux bases ; elles sont donc semblables. Plus explicitement, la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est $S = \text{diag}(1, -1, 1)$. Elle est inversible et $S^{-1} = S$, et la formule de changement de base donne $M_2 = S^{-1}M_1S$.

Le produit vaut

$$M_1M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Dans la partie inférieure d'ordre 2, le coefficient au-dessus de la diagonale est $1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$; les autres coefficients sont ceux de l'identité. On en déduit $M_2 = M_1^{-1}$.

8. Soit P_1 la matrice dont les colonnes sont u_1, u_2, u_3 dans la base canonique. Elle est inversible puisque $\mathcal{B}_1$ est une base, et $M = P_1M_1P_1^{-1}$. Ainsi

$$M^{-1} = P_1 M_1^{-1} P_1^{-1} = P_1 M_2 P_1^{-1}.$$

En posant $R = P_1 S P_1^{-1}$, où S est la matrice de $7b$, on obtient

$$R^{-1} M R = P_1 S^{-1} M_1 S P_1^{-1} = P_1 M_2 P_1^{-1} = M^{-1}.$$

La matrice R est inversible, ce qui établit bien la similitude de M et M^{-1} . Tout le raisonnement porte sur les matrices concrètes des changements de base.

Partie C : Troisième exemple

9. La matrice T est triangulaire supérieure et ses trois coefficients diagonaux valent 1. Elle est inversible : on peut résoudre $TX = Y$ par substitution en commençant par la dernière ligne, sans jamais diviser par zéro.

Le même argument sur la dernière coordonnée non nulle d'un vecteur propre que dans la question 1 montre que la seule valeur propre possible est 1. Elle est effectivement propre, puisque ${}^t(T(1, 0, 0)) = {}^t(1, 0, 0)$.

Si T était diagonalisable, il existerait une matrice inversible P et une matrice diagonale D dont tous les coefficients seraient des valeurs propres de T , avec $T = PDP^{-1}$.

Nécessairement $D = I_3$, ce qui imposerait $T = I_3$. Or son coefficient en position $(1, 2)$ vaut -1 . La matrice T n'est donc pas diagonalisable.

10. a) On calcule successivement

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

Le seul coefficient non nul de N^2 est celui de position $(1, 3)$: il vaut $(-1)(-1) = 1$. En multipliant encore par N , on obtient la matrice nulle puisque la troisième ligne de N est nulle.

La distributivité du produit matriciel donne

$$(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I_3.$$

10. b) Puisque $T = I_3 + N$, la relation précédente s'écrit $T(I_3 - N + N^2) = I_3$. La matrice T est déjà connue inversible, donc

$$T^{-1} = I_3 - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette formule découle du produit explicite calculé en 10a, sans recourir à un théorème général sur les polynômes de matrices.

11. a) Prenons $u = (0, 0, 1)$. Les calculs de 10a donnent

$$g(u) = (1, -1, 0), \quad g \circ g(u) = (1, 0, 0) \neq 0, \quad g \circ g \circ g(u) = 0.$$

Un vecteur satisfaisant les deux conditions existe donc. Dans la suite, on peut utiliser ce choix ou n'importe quel vecteur satisfaisant ces conditions.

11. b) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$ag^2(u) + bg(u) + cu = 0,$$

où $g^2 = g \circ g$. En appliquant g^2 à cette relation et en utilisant $g^3(u) = 0$, on obtient $cg^2(u) = 0$. Comme $g^2(u) \neq 0$, il vient $c = 0$.

On applique alors g à la relation restante : $bg^2(u) = 0$, donc $b = 0$. Enfin $ag^2(u) = 0$ donne $a = 0$.

La famille de trois vecteurs est libre dans $\mathbb{R}^3$, donc c'est une base. Cette preuve établit directement le résultat particulier demandé.

11. c) Les images des trois vecteurs de $\mathcal{B}_3$ sont respectivement

$$g(g^2(u)) = 0, \quad g(g(u)) = g^2(u), \quad g(u) = g(u).$$

Leurs colonnes de coordonnées dans cette base sont ${}^t(0, 0, 0)$, ${}^t(1, 0, 0)$ et ${}^t(0, 1, 0)$. Ainsi

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(g) = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. d) Le calcul direct à partir de 10a donne

$$N^2 - N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J.$$

La matrice N représente g dans la base canonique et J le représente dans la base $\mathcal{B}_3$. Ces deux matrices sont donc semblables. Si P_3 est la matrice de passage dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}_3$, on a précisément

$$P_3^{-1}NP_3 = J = N^2 - N.$$

12. En utilisant la même matrice inversible P_3 ,

$$P_3^{-1}TP_3 = P_3^{-1}(I_3 + N)P_3 = I_3 + P_3^{-1}NP_3 = I_3 + N^2 - N.$$

Or la question 10b identifie le dernier membre à T^{-1} . On a donc $P_3^{-1}TP_3 = T^{-1}$, ce qui prouve que T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 3

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2}.$$

Le dénominateur et $t+1$ étant strictement positifs, le signe de la dérivée est celui de $t-1$. La fonction est donc strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Son minimum vaut $f(1) = 2$.

Lorsque $t \rightarrow 0^+$, le terme $1/t$ tend vers $+\infty$, tandis que t tend vers 0, donc $f(t) \rightarrow +\infty$.

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, $f(t) \geq t$ donne également $f(t) \rightarrow +\infty$.

t	0^+		1		$+\infty$
$f'(t)$		—	0	+	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2. La restriction de f à $[1, +\infty[$ est continue et strictement croissante. Elle prend la valeur 2 en 1 et tend vers $+\infty$ à l'infini. Le théorème de la bijection montre qu'elle est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$.

3. a) La réciproque d'une bijection continue strictement croissante sur un intervalle est continue et strictement croissante sur l'intervalle image. Ainsi g est continue et strictement croissante sur $[2, +\infty[$, avec $g(2) = 1$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = +\infty$.

Pour justifier cette dernière limite, soit $R \geq 1$. Si $y \geq f(R)$, la croissance de la réciproque donne $g(y) \geq R$. Cela établit bien la divergence vers $+\infty$.

y	2		$+\infty$
$g(y)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. b) Pour $y > 2$, on a $g(y) > 1$. La dérivée de f en $g(y)$ est donc strictement positive :
 $f'(g(y)) = 1 - 1/g(y)^2 > 0$. La fonction f est dérivable et sa dérivée ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$. Le théorème de dérivation d'une fonction réciproque s'applique donc sur $]2, +\infty[$ et donne

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{1 - 1/g(y)^2}.$$

Cela justifie la dérivabilité demandée ; le point 2, où $f'(1) = 0$, n'appartient pas à l'intervalle concerné.

3. c) Puisque $t > 0$, multiplier l'équation $t + 1/t = y$ par t est une opération équivalente. L'équation devient

$$t^2 - yt + 1 = 0.$$

Pour $y \geq 2$, son discriminant est $y^2 - 4 \geq 0$. Ses racines sont

$$t_- = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad t_+ = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

Elles sont positives : $y > \sqrt{y^2 - 4}$ et les deux numérateurs sont donc strictement positifs. Pour $y = 2$, elles coïncident en 1. Pour $y > 2$, on a $t_+ > 1$; comme leur produit vaut 1, il en résulte $0 < t_- < 1$.

La seule racine appartenant à $[1, +\infty[$ est donc t_+ , y compris pour $y = 2$. Par la définition de la réciproque,

$$\forall y \geq 2, \quad g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

Partie B : Étude d'une fonction de deux variables

4. Sur l'ouvert U , les dénominateurs ne s'annulent pas. On peut écrire

$$h(x, y) = \left(\frac{1}{x} + 1\right)(1 + y) + \frac{(1 + x)(1 + y)}{y}.$$

En dérivant par rapport à x à y fixé, on obtient

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = -\frac{1 + y}{x^2} + \frac{1 + y}{y} = (1 + y) \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}\right).$$

Par un calcul analogue, ou en utilisant la symétrie en x et y ,

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = (1 + x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \right).$$

5. Un point de U est critique lorsque les deux dérivées partielles premières s'annulent.

Comme $1 + x > 0$ et $1 + y > 0$, les formules de la question 4 donnent les équivalences

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 0 \iff \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} \iff y = x^2,$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 0 \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{y^2} \iff x = y^2.$$

Les multiplications par yx^2 et par xy^2 sont licites puisque $x, y > 0$. On obtient exactement le système annoncé.

6. En remplaçant y par x^2 dans $x = y^2$, on obtient $x = x^4$. Comme $x > 0$, on peut diviser par $x : x^3 = 1$. L'unique solution positive est $x = 1$, puis $y = x^2 = 1$.

Réciproquement, ce couple satisfait les deux équations.

L'unique point critique est donc $(a, b) = (1, 1)$.

Pour contrôler sa nature par la méthode des hessiennes, on dérive les expressions de la question 4 :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2(1+y)}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2(1+x)}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}.$$

Ainsi

$$H_h(1, 1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$ sont des vecteurs propres associés respectivement à 2 et à 6, car la multiplication par cette matrice donne $(2, 2)$ et $(6, -6)$. Ils forment une base de $\mathbb{R}^2$ et les deux valeurs propres sont strictement positives. La fonction h étant de classe $\mathcal{C}^2$

sur l'ouvert U contenant $(1, 1)$, le critère de la hessienne donne un minimum local strict. Le caractère global reste à établir en 7b.

7. a) En développant les produits,

$$h(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{y}{x} + 1 + y + \frac{1}{y} + 1 + \frac{x}{y} + x.$$

En regroupant les termes,

$$h(x, y) = 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Les trois arguments x , y et x/y sont strictement positifs, donc toutes ces évaluations sont définies.

7. b) D'après l'étude de f , on a $f(t) \geq 2$ pour tout $t > 0$, avec égalité seulement pour $t = 1$. La décomposition de 7a donne, pour tout $(x, y) \in U$,

$$h(x, y) \geq 2 + 2 + 2 + 2 = 8.$$

Or $h(1, 1) = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8$. La fonction atteint donc sa borne inférieure en $(a, b) = (1, 1)$: c'est un minimum global sur U , de valeur 8.

Si l'égalité $h(x, y) = 8$ se produit, les trois termes $f(x) - 2$, $f(y) - 2$ et $f(x/y) - 2$, tous positifs ou nuls, ont une somme nulle. En particulier $f(x) = f(y) = 2$, d'où $x = y = 1$. Le minimum global est unique. Cette majoration directe complète le résultat local établi par la hessienne ; ce dernier, à lui seul, n'aurait pas suffi à conclure globalement.

Partie C : Étude d'une suite

8. On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Le terme $u_1 = 1$ existe et satisfait l'inégalité. Si u_n existe et $u_n \geq 1$, alors $n^2 u_n > 0$. Le quotient $1/(n^2 u_n)$ est donc défini et positif. Par conséquent,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} > u_n \geq 1.$$

La propriété est héréditaire et tous les termes sont définis et au moins égaux à 1. Le calcul montre également que la suite est strictement croissante.

9. Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python : on part de u_1 et on effectue les transitions d'indices $k = 1, \dots, n - 1$.

Python

```
def suite(n):
    u = 1
    for k in range(1, n):
        u = u + 1 / (k**2 * u)
    return u
```

L'argument doit être un entier $n \geq 1$. Au début du passage d'indice k , la variable u contient u_k ; la mise à jour y place u_{k+1} . La borne supérieure de `range(1, n)` étant exclue, le dernier passage calcule u_n . Si $n = 1$, la boucle est vide et la fonction renvoie correctement 1. Aucun import n'est nécessaire.

10. a) La relation de récurrence et la question 8 donnent

$$v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2 u_n} > 0.$$

Comme $u_n \geq 1$, on a $1/u_n \leq 1$. D'où, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

10. b) Question adaptée au programme actuel : l'indication permet d'étudier directement les sommes partielles par télescopage, sans invoquer hors du cadre probabiliste un chapitre général de comparaison des séries.

Pour $n \geq 2$, on a $n(n-1) \leq n^2$ avec les deux membres strictement positifs. Par passage aux inverses,

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Posons

$$S_m = \sum_{n=1}^m v_n.$$

Les termes v_n étant positifs ou nuls, la suite (S_m) est croissante. Pour $m \geq 2$, la majoration terme à terme d'une somme finie donne

$$0 \leq S_m \leq v_1 + \sum_{n=2}^m \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = v_1 + 1 - \frac{1}{m}.$$

Or $v_1 = 1/(1^2 u_1) = 1$. Ainsi $S_m \leq 2$; cette borne vaut aussi pour $m = 1$. La suite des sommes partielles est croissante et majorée, donc elle converge vers un réel fini. Par définition, la série

$$\sum_{n \geq 1} v_n$$

converge.

10. c) Pour $n \geq 2$, le télescopage donne

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_1 = u_n - 1.$$

La série de terme général v_k étant convergente, ses sommes partielles tendent vers un réel fini S . L'identité précédente montre alors que u_n converge vers $\ell = 1 + S$. On ne cherche pas à déterminer exactement ce réel.

11. a) Pour $k \geq 2$ et $t \in [k-1, k]$, on a $0 < t \leq k$. Par conséquent $1/t^2 \geq 1/k^2$. Ces fonctions sont continues sur le segment puisque $k-1 \geq 1$. En intégrant cette inégalité sur un intervalle de longueur 1, on obtient

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt \geq \int_{k-1}^k \frac{1}{k^2} dt = \frac{1}{k^2}.$$

11. b) Pour $2 \leq p < n$, la somme finie se télescope :

$$\sum_{k=p}^{n-1} v_k = u_n - u_p.$$

Les questions 10a et 11a donnent, pour chaque entier k de cette somme,

$$0 \leq v_k \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt.$$

En additionnant les inégalités puis en utilisant la relation de Chasles pour les intégrales sur segments adjacents, il vient

$$0 \leq u_n - u_p \leq \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt = \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$

On peut expliciter la borne avec la primitive $-1/t$:

$$0 \leq u_n - u_p \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}.$$

11. c) Pour $n \geq 3$, on peut prendre $p = 2$ dans la question précédente. On obtient

$$0 \leq u_n - u_2 \leq 1 - \frac{1}{n-1} \leq 1,$$

donc $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$. La récurrence donne $u_2 = 1 + 1 = 2$. Ainsi $2 \leq u_n \leq 3$ pour $n \geq 3$. Par passage à la limite dans cet encadrement, en utilisant la convergence déjà établie, on conclut $\ell \in [2, 3]$.

11. d) Fixons un entier $p \geq 2$. Pour tout entier $n > p$, 11b donne

$$0 \leq u_n - u_p \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, le membre central tend vers $\ell - u_p$ et le membre de droite vers $1/(p-1)$. Le passage à la limite dans les inégalités donne donc

$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}.$$

11. e) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python : choisissons $p = 10001$. Alors $1/(p-1) = 10^{-4}$ et la question 11d garantit que u_p approche ℓ par défaut à 10^{-4} près.

Python

```
def approximation_limite():
    p = 10001
    u = 1.0
    for k in range(1, p):
        u = u + 1 / (k**2 * u)
    return u
```

La variable u suit exactement les mises à jour de la fonction `suite`, jusqu'au rang choisi. La fonction ne prend aucun argument et renvoie une valeur approchée de la limite. Aucun import n'est nécessaire.

Les deux codes Python de ce corrigé ont été exécutés : les premiers appels donnent $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 2,125$, et `approximation_limite()` renvoie environ $2,304251$ en arithmétique flottante. L'encadrement démontré concerne les termes mathématiques exacts : $u_{10001} \leq \ell \leq u_{10001} + 10^{-4}$. La valeur affichée par le code est une approximation numérique de ce terme ; la convergence et la borne d'erreur résultent de la démonstration, et non de l'exécution.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 5b : l'égalité d'événements imprimée omettait le cas où aucun indice ne satisfait l'inégalité, cas pour lequel N est défini égal à 0. Elle est remplacée par l'union disjointe $[M_n > T_0] = [N > n] \cup [N = 0]$. La probabilité demandée est ajustée en conséquence ; les questions 5c et 5d déterminent ensuite la loi et démontrent $P(N = 0) = 0$ sans utiliser prématurément ce résultat.

Exercice 3, questions 9 et 11e : code adapté en Python, avec conservation des deux lignes à compléter dans le sujet et des bornes de la récurrence.

Exercice 3, question 10b : indication télescopique ajoutée pour établir la convergence par des sommes partielles croissantes et majorées, sans faire appel hors probabilités au chapitre général sur les séries de référence de deuxième année.