



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2018

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z).$$

Enfin, on pose $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $v = f(e_1) + e_1$.

1. a) Calculer v .
1. b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
1. c) On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Expliciter la matrice P et calculer P^{-1} .
2. a) Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.
2. b) En déduire les valeurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
2. c) L'endomorphisme f est-il bijectif?
2. d) Expliciter, sans justification, le lien entre les matrices A , A' , P et P^{-1} .

- 3. a) Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathcal{B}$.
- 3. b) Montrer que $B^2 = 2B$.
- 3. c) En déduire les valeurs propres de g , ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.
- 3. d) L'endomorphisme g est-il diagonalisable?

On pose $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$.

- 4. a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
- 4. b) Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$. Montrer que M n'est pas inversible. On pourra raisonner par l'absurde.
- 5. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.
 - 5. a) Justifier que, pour tout réel λ , les matrices $A - \lambda I_3$ et ${}^t A - \lambda I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - 5. b) En déduire que les matrices B et ${}^t A$ admettent une valeur propre en commun, notée α .
 - 5. c) Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α , et Y un vecteur propre de ${}^t A$ associé à la valeur propre α . On note $N = X {}^t Y$. Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$.
 - 5. d) En déduire que $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b , telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Montrer que $b \in [2, 4]$. On donne $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [b, +\infty[$.
5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
6. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$.
6. b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
7. a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def suite(n):` qui, prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n . La commande `numpy.log(x)` calcule le logarithme népérien de $x > 0$.
7. b) Recopier et compléter la condition de la boucle de la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un réel epsilon strictement positif, elle renvoie une

valeur approchée de b à epsilon près.

Python

```
def valeur_approchee(epsilon):
    n = 0
    while ...:
        n = n + 1
    b = suite(n)
    return b
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt$.

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

9. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$.

10. Montrer que, pour tout $x > 0$, $0 \leq \Phi(x) \leq x$.

11. a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0. On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

11. b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi'(x) = 0$. On admet que la fonction Φ est alors dérivable à droite en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

12. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$. Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe C^2 sur l'ouvert $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in U, \quad H(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y.$$

13. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout $(x, y) \in U$.
13. b) Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où a et b sont les deux réels introduits dans la question 2.
14. a) Écrire la matrice hessienne, notée M_a , de H au point $(a, \ln(a))$.
14. b) Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2 , vérifiant $\lambda_1 + \lambda_2 = a + 1$ et $\lambda_1 \lambda_2 = a - 1$.
14. c) La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$?
15. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$?

Exercice 3

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Tous les lancers considérés dans cet exercice sont indépendants ; dans la partie III, cela comprend les lancers des deux joueurs et les différentes répétitions de la simulation.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. a) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$, puis calculer leurs probabilités.

1. b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis, en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

2. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U .

2. b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

2. c) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(U = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n), \quad \text{puis} \quad P(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

2. d) Montrer que U admet une espérance et une variance, et les calculer.

3. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V .

3. b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

3. c) En déduire la loi de V .

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
5. Que vaut $\text{Cov}(U, V)$? En déduire $\text{Cov}(X, U)$.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, 1[$. Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus ;
- le joueur B dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus ;
- le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon, c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. Simulation informatique.

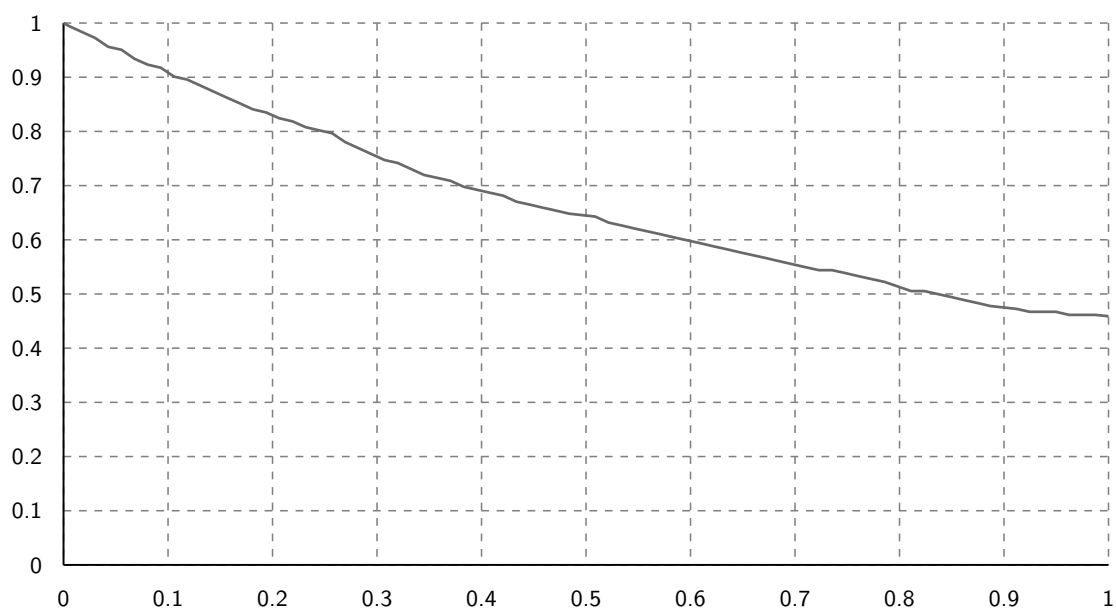
La commande `numpy.random.random()` renvoie un nombre pseudo-aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$; les appels successifs représentent des tirages indépendants.

6. a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def simule_X()` : qui simule la variable aléatoire X .
6. b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y(p)` qui, prenant en argument un réel $p \in]0, 1[$, simule la variable aléatoire Y . Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

Python

```
def mystere(p):
    r = 0
    N = 10000
    for k in range(N):
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y:
            r = r + 1 / N
    return r
```

6. c) On trace, en fonction de p , une estimation de la probabilité que A gagne, et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour laquelle le jeu serait équilibré.

7. Étude de la variable aléatoire Y .

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B .

7. a) Reconnaître la loi de Z et préciser son ou ses paramètres, son espérance et sa variance.
7. b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y , et préciser leurs valeurs.
7. c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(Y \geq n) = (1 - p)^n$.
8. a) Montrer que

$$P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(Y \geq n).$$

8. b) Déduire des résultats précédents que $P(X \leq Y) = \frac{4}{(2 + p)^2}$.
8. c) Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.