



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2018

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1. a) La première colonne de A donne $f(e_1) = (0, -2, 1)$. Par conséquent, $v = (1, -2, 1)$.

1. b) Soient $r, s, t \in \mathbb{R}$ tels que $ru + sv + te_1 = 0$. La troisième coordonnée donne $s = 0$, la deuxième donne alors $-r = 0$, puis la première donne $t = 0$.

La famille est libre et possède trois vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 : c'est donc une base.

1. c) Les colonnes de P sont les coordonnées de u, v, e_1 dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer l'inverse, résolvons $(x, y, z) = ru + sv + te_1$. Les coordonnées donnent $s = z$, $r = -y - 2z$ et $t = x + y + z$. Ainsi,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette résolution fournit une unique solution pour tout (x, y, z) , ce qui justifie aussi directement l'inversibilité de P .

2. a) Calculons les images des vecteurs de la nouvelle base :

$$f(u) = (2, -2, 0) = 2u, \quad f(v) = (-1, 2, -1) = -v, \quad f(e_1) = v - e_1.$$

Ces coordonnées forment les colonnes de

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. b) La matrice A' est triangulaire : ses valeurs propres sont 2 et -1 .

Dans les coordonnées de $\mathcal{C}$, le système $(A' - 2I_3)(r, s, t)^t = 0$ donne $t = 0, s = 0$, avec r libre. Ainsi $E_2(f) = \text{Vect}(u)$.

Le système $(A' + I_3)(r, s, t)^t = 0$ donne $r = 0, t = 0$, avec s libre. Ainsi $E_{-1}(f) = \text{Vect}(v)$.

Les deux sous-espaces propres ont chacun dimension 1. Tous les vecteurs propres appartiennent à leur somme, de dimension 2, et ne peuvent donc former une base de $\mathbb{R}^3$. L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

2. c) La matrice triangulaire A' possède trois coefficients diagonaux non nuls : elle est inversible. Donc f est bijectif.

On peut également le vérifier par son noyau : $A'(r, s, t)^t = 0$ donne successivement $t = 0, s = 0, r = 0$; le théorème du rang montre alors que f est un isomorphisme.

2. d) $A' = P^{-1}AP$, ou, de manière équivalente, $A = PA'P^{-1}$.

3. a) En lisant les coefficients des trois coordonnées de g , on obtient

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. b) Le produit matriciel donne

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2B.$$

Par exemple, la première ligne est $(1 + 1, 1 + 2 - 1, -1 - 1) = (2, 2, -2)$; la deuxième est $(0, 4, 0)$ et la troisième $(-1 - 1, -1 + 2 + 1, 1 + 1) = (-2, 2, 2)$.

3. c) Si $BX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, l'égalité précédente donne $\lambda^2 X = 2\lambda X$, donc $\lambda(\lambda - 2) = 0$. Les seules valeurs propres possibles sont 0 et 2; montrons qu'elles sont effectivement atteintes.

Le système ${}^t(B(x, y, z)) = 0$ impose $y = 0$ et $x = z$. Ainsi,

$$E_0(g) = \text{Vect}((1, 0, 1)).$$

Le système ${}^t(B(x, y, z)) = 2(x, y, z)^t$ se réduit à $y = x + z$. Ainsi,

$$E_2(g) = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1)).$$

Les deux vecteurs de la dernière famille sont libres, puisque leurs première et troisième coordonnées isolent leurs coefficients. Les valeurs propres de g sont donc exactement 0 et 2, avec les bases affichées.

3. d) Une base de $E_0(g)$ et une base de $E_2(g)$ constituent ensemble une famille libre, car les valeurs propres sont distinctes. Cette famille possède $1 + 2 = 3$ vecteurs dans $\mathbb{R}^3$: elle forme une base de vecteurs propres. Donc g est diagonalisable.

4. a) L'ensemble $\mathcal{E}$ est inclus dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et contient la matrice nulle. Si $M, N \in \mathcal{E}$ et $r, s \in \mathbb{R}$, alors

$$B(rM + sN) = rBM + sBN = rMA + sNA = (rM + sN)A.$$

Il est donc stable par combinaison linéaire et constitue un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. b) Supposons $M \in \mathcal{E}$ inversible. Le vecteur v est non nul et $Av = -v$. On aurait

$$B(Mv) = MAv = -Mv.$$

L'inversibilité de M impose $Mv \neq 0$: -1 serait donc valeur propre de B , contrairement à la question 3. Ainsi, aucune matrice de $\mathcal{E}$ n'est inversible.

5. a) On établit ici l'égalité des rangs directement pour les matrices données, sans supposer un théorème supplémentaire sur la transposition.

Si $\lambda \notin \{2, -1\}$, la matrice triangulaire $A' - \lambda I_3$ a ses coefficients diagonaux non nuls. La similitude $A - \lambda I_3 = P(A' - \lambda I_3)P^{-1}$ montre donc que $A - \lambda I_3$ est inversible. La transposée de son inverse est un inverse de ${}^tA - \lambda I_3$, par transposition des produits. Les deux rangs valent 3.

Pour $\lambda = 2$,

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ses deux premières colonnes sont égales et sa troisième colonne n'est pas proportionnelle à la première : son rang vaut 2. Les lignes appartiennent toutes au plan des vecteurs dont les deux premières coordonnées sont égales, et ses deux premières lignes sont indépendantes : le rang de la transposée vaut donc aussi 2.

Pour $\lambda = -1$,

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ses deux premières colonnes sont indépendantes et la troisième est l'opposé de la première plus deux fois la deuxième : son rang vaut 2. Ses deux premières lignes sont

indépendantes, et la troisième est l'opposé de leur somme : le rang de la transposée vaut également 2.

Dans tous les cas, les deux rangs sont donc égaux.

5. b) La question 5a montre en particulier que ${}^tA - 2I_3$ a rang $2 < 3$, donc un noyau non nul : 2 est valeur propre de ${}^tA$. C'est aussi une valeur propre de B d'après 3c. On peut donc prendre $\alpha = 2$.

5. c) Les vecteurs colonnes X et Y sont non nuls. Il existe des indices i, j tels que $X_i \neq 0$ et $Y_j \neq 0$. Le coefficient (i, j) de N vaut $X_i Y_j \neq 0$, donc $N \neq 0$.

D'autre part,

$$BN = (BX)^t Y = \alpha X^t Y = \alpha N,$$

$$NA = X({}^t Y A) = X({}^t({}^t A Y)) = X({}^t(\alpha Y)) = \alpha N.$$

Ainsi $BN = NA$, c'est-à-dire $N \in \mathcal{E}$.

5. d) D'après 3c, choisissons deux vecteurs propres indépendants $X_1 = (1, 1, 0)^t$ et $X_2 = (0, 1, 1)^t$ pour la valeur propre 2 de B . Fixons un vecteur propre non nul Y de ${}^tA$ pour cette même valeur propre, dont l'existence vient de 5b. Les matrices $N_1 = X_1 {}^t Y$ et $N_2 = X_2 {}^t Y$ appartiennent à $\mathcal{E}$.

Si $rN_1 + sN_2 = 0$, alors $(rX_1 + sX_2){}^t Y = 0$. Une coordonnée Y_j étant non nulle, la colonne j donne $Y_j(rX_1 + sX_2) = 0$, donc $rX_1 + sX_2 = 0$. L'indépendance de X_1, X_2 impose $r = s = 0$.

La famille (N_1, N_2) est donc libre dans $\mathcal{E}$, d'où $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$.

Exercice 2

Partie I : Étude de la fonction f

1. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Comme $x > 0$, le signe est celui de $x - 1$: f décroît strictement sur $]0, 1]$ puis croît strictement sur $[1, +\infty[$. Sa valeur minimale est $f(1) = 1$.

Quand $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0$ et $-\ln(x) \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\ln(x)/x \rightarrow 0$, donc $f(x) = x(1 - \ln(x)/x) \rightarrow +\infty$.

x	0^+		1		$+\infty$
$f'(x)$		—	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction f est continue, strictement décroissante de $+\infty$ à 1 sur $]0, 1]$, puis strictement croissante de 1 à $+\infty$ sur $[1, +\infty[$. Le théorème de la bijection, appliqué à chacune de ces restrictions, donne une unique solution $a \in]0, 1[$ et une unique solution $b \in]1, +\infty[$ de $f(x) = 2$. Il n'en existe pas d'autre.
3. On a $0 < \ln(2) < 1$, par exemple en intégrant $0 < 1/t < 1$ sur $]1, 2]$. Ainsi $f(2) = 2 - \ln(2) < 2$ et $f(4) = 4 - 2\ln(2) > 2$. Comme f croît strictement sur $[1, +\infty[$, on obtient en fait $2 < b < 4$, ce qui donne l'encadrement demandé.

Partie II : Étude d'une suite

4. Procédons par récurrence. Le terme initial $u_0 = 4$ est défini et supérieur à b . Si u_n est défini et $u_n \geq b > 0$, son logarithme existe et

$$u_{n+1} = \ln(u_n) + 2 \geq \ln(b) + 2 = b,$$

car $f(b) = 2$. Tous les termes sont donc définis et appartiennent à $[b, +\infty[$.

5. Méthode 1 — Utiliser les variations de f

Sur $[b, +\infty[$, on a $f(u_n) \geq f(b) = 2$. Par conséquent,

$$u_{n+1} - u_n = 2 - f(u_n) \leq 0.$$

La suite est décroissante et minorée par b ; elle converge vers un réel $\ell \geq b$. La continuité du logarithme en $\ell > 0$ donne $\ell = \ln(\ell) + 2$, donc $f(\ell) = 2$. Parmi les deux solutions a, b , seule b est supérieure ou égale à b : ainsi $\ell = b$.

Méthode 2 — Propager le sens de variation

On a $u_1 - u_0 = \ln(4) - 2 < 0$. La fonction $x \mapsto \ln(x) + 2$ est strictement croissante; si $u_{n+1} < u_n$, alors $u_{n+2} < u_{n+1}$. La récurrence donne la stricte décroissance. Avec la minoration de 4, le théorème de convergence monotone puis le passage à la limite précédent donnent encore $u_n \rightarrow b$.

La première méthode exploite directement l'étude de f ; la seconde illustre le rôle de la monotonie de la fonction d'itération.

6. a) Sur le segment $[b, u_n]$, la dérivée du logarithme vérifie $0 < 1/t \leq 1/b \leq 1/2$.

L'inégalité des accroissements finis donne

$$0 \leq \ln(u_n) - \ln(b) \leq \frac{1}{2}(u_n - b).$$

Or $u_{n+1} - b = \ln(u_n) - \ln(b)$, ce qui est exactement l'inégalité demandée.

6. b) En itérant l'inégalité précédente, ou par récurrence, on obtient

$$0 \leq u_n - b \leq 2^{-n}(u_0 - b) = \frac{4 - b}{2^n} \leq \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

puisque $b \geq 2$. Cette formule est également valable pour $n = 0$.

7. a) Code adapté en Python. On part de u_0 et l'on effectue exactement n passages dans la relation de récurrence.

Python

```
import numpy as np

def suite(n):
    u = 4.0
    for k in range(n):
        u = np.log(u) + 2
    return u
```

Après k passages, la variable u vaut u_k ; la fonction renvoie donc u_n . Pour $n = 0$, la boucle est vide et renvoie bien 4.

7. b) Code adapté en Python. On augmente n tant que le majorant de l'erreur dépasse la précision souhaitée.

Python

```
import numpy as np

def suite(n):
    u = 4.0
    for k in range(n):
        u = np.log(u) + 2
    return u

def valeur_approchee(epsilon):
    n = 0
    while 2.0 ** (1 - n) > epsilon:
        n = n + 1
    b = suite(n)
    return b
```

Pour tout ϵ strictement positif, le majorant 2^{1-n} tend vers 0, donc la boucle se termine. À sa sortie, $0 \leq u_n - b \leq 2^{1-n} \leq \epsilon$. Le nom local b contient une approximation, et non la solution exacte. La garantie mathématique porte sur la suite exacte; le calcul numérique utilise des nombres flottants.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

8. La question 1 donne $f(t) \geq 1$ pour tout $t > 0$. Ainsi $t \mapsto 1/f(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et en particulier sur chaque segment $[x, 2x]$. L'intégrale existe.

Si F est une primitive de $1/f$ sur $]0, +\infty[$, alors $\Phi(x) = F(2x) - F(x)$. Par dérivation des composées,

$$\Phi'(x) = \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{2f(x) - f(2x)}{f(x)f(2x)}.$$

Or $2f(x) - f(2x) = -2\ln(x) + \ln(2x) = \ln(2) - \ln(x)$. On obtient donc la formule de l'énoncé, avec un dénominateur strictement positif.

9. Le signe de $\Phi'(x)$ est celui de $\ln(2) - \ln(x)$. Ainsi Φ est strictement croissante sur $]0, 2]$, puis strictement décroissante sur $[2, +\infty[$; elle atteint son maximum en 2.

10. Sur $[x, 2x]$, on a $0 < 1/f(t) \leq 1$. Par positivité et comparaison des intégrales sur segment,

$$0 \leq \Phi(x) \leq \int_x^{2x} 1 \, dt = x.$$

11. a) L'encadrement précédent donne $\Phi(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. L'unique prolongement continu à 0 est donc défini par $\Phi(0) = 0$.

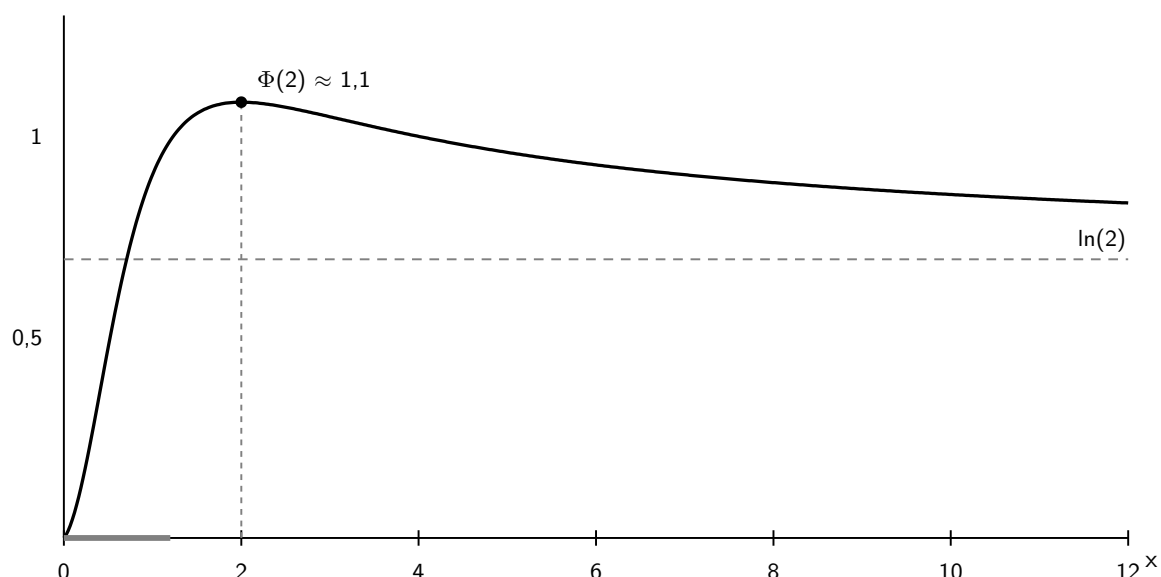
11. b) Posons $L = -\ln(x)$, qui tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. On peut écrire

$$\Phi'(x) = \frac{L + \ln(2)}{(L+x)(L+2x-\ln(2))} = \frac{1}{L} \frac{1 + \ln(2)/L}{(1+x/L)(1+(2x-\ln(2))/L)}.$$

Les trois quotients ajoutés à 1 tendent vers 0, donc la dernière fraction tend vers 1, tandis que $1/L \rightarrow 0$. Ainsi $\Phi'(x) \rightarrow 0$.

La dérivabilité à droite en 0 et la valeur $\Phi'(0) = 0$ sont admises dans l'énoncé. On peut aussi les établir ici directement : pour $0 < x \leq 1/2$, f est décroissante sur $[x, 2x]$, donc $0 \leq \Phi(x)/x \leq 1/f(2x) \rightarrow 0$. C'est le taux d'accroissement à droite en 0.

12. La courbe part de l'origine avec une tangente horizontale, l'axe des abscisses. Elle croît jusqu'à son maximum d'abscisse 2, de hauteur voisine de 1,1, puis décroît vers l'asymptote horizontale d'équation $y = \ln(2)$, qu'elle approche par au-dessus.



Le tracé est calculé à partir de l'intégrale définissant Φ ; il illustre les variations et les limites établies ou admises et ne sert pas à les démontrer.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

13. a) Question adaptée au programme actuel : le domaine imprimé dans le sujet source est rectifié en $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. En effet, le point demandé à la question suivante possède une seconde coordonnée $\ln(a) < 0$ et n'appartient pas au quadrant strict imprimé. Cette rectification conserve les deux points et toutes les questions 13 à 15.

Sur cet ouvert, les termes polynomiaux et l'exponentielle sont de classe C^2 , et

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = x - y - 2, \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = -x + e^y.$$

13. b) Un point est critique si et seulement si $x - y - 2 = 0$ et $e^y = x$. La deuxième égalité impose $x > 0$ et équivaut à $y = \ln(x)$. La première devient alors $x - \ln(x) = 2$.

La question 2 donne exactement deux possibilités : $x = a$ ou $x = b$. Les deux couples $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$ appartiennent au domaine rectifié U et vérifient réciproquement les deux équations. Ce sont donc exactement les deux points critiques.

14. a) Les dérivées secondes donnent, pour tout $(x, y) \in U$,

$$\nabla^2 H(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & e^y \end{pmatrix}.$$

En particulier, puisque $e^{\ln(a)} = a$,

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

14. b) On recherche les valeurs propres par les équations des vecteurs propres. Si

$M_a(s, t)^t = \lambda(s, t)^t$ avec $(s, t) \neq (0, 0)$, la première équation donne $t = (1 - \lambda)s$. Elle montre aussi que $s \neq 0$, sinon $t = 0$.

La seconde équation devient $-s + (a - \lambda)(1 - \lambda)s = 0$, soit

$$\lambda^2 - (a + 1)\lambda + a - 1 = 0.$$

Le discriminant de ce trinôme réel est $(a + 1)^2 - 4(a - 1) = (a - 1)^2 + 4 > 0$. Il possède donc deux racines réelles distinctes λ_1, λ_2 . Réciproquement, pour chaque racine λ , le vecteur non nul $(1, 1 - \lambda)$ vérifie les deux équations : ces racines sont bien les deux valeurs propres.

Les relations entre les coefficients et les racines du trinôme donnent $\lambda_1 + \lambda_2 = a + 1$ et $\lambda_1 \lambda_2 = a - 1$. Aucun déterminant ni polynôme caractéristique n'a été utilisé.

14. c) Comme $0 < a < 1$, le produit des deux valeurs propres est $a - 1 < 0$. Elles ont donc des signes opposés. La fonction H est C^2 sur l'ouvert U et le point considéré est critique : le critère hessien conclut qu'il s'agit d'un point selle. Il n'y a pas d'extremum local en $(a, \ln(a))$.

15. Au second point critique, la hessienne est $M_b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$. Le raisonnement par les équations propres de M_b , avec b à la place de a , donne deux valeurs propres réelles distinctes dont la somme vaut $b + 1 > 0$ et le produit $b - 1 > 0$.

Le produit positif impose des signes identiques; la somme positive exclut deux signes négatifs. Les deux valeurs propres sont donc strictement positives. Les hypothèses du critère hessien sont vérifiées : H possède un minimum local strict en $(b, \ln(b))$. Cette conclusion est locale; elle ne suppose aucune étude du bord ou de l'infini.

Exercice 3

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

1. a) Notons P un résultat Pile et F un résultat Face. L'événement $[X = 0]$ correspond à la suite PP ; par indépendance, sa probabilité vaut $(2/3)^2 = 4/9$.

L'événement $[X = 1]$ correspond aux suites FPP ou PFP , disjointes; chacune a probabilité $(1/3)(2/3)^2 = 4/27$. Ainsi $P(X = 1) = 8/27$.

L'événement $[X = 2]$ correspond aux suites $FFPP$, $FPFP$ ou $PFFP$, disjointes; chacune a probabilité $(1/3)^2(2/3)^2 = 4/81$. Ainsi $P(X = 2) = 12/81 = 4/27$.

1. b) Pour $X = n$, le dernier lancer est le deuxième Pile. Les $n + 1$ lancers précédents contiennent exactement un Pile et n Face. Il y a $n + 1$ positions possibles pour ce premier Pile; ces possibilités sont disjointes.

Chacune a probabilité $(2/3)^2(1/3)^n$, d'où $P(X = n) = (n + 1)4/3^{n+2}$ pour tout $n \geq 0$.

Cette formule définit bien toute la loi : la série géométrique dérivée donne

$$\sum_{n \geq 0} (n + 1)(1/3)^n = (1 - 1/3)^{-2} = 9/4,$$

donc la somme des probabilités affichées vaut 1. Le deuxième Pile est ainsi obtenu avec probabilité 1, ce qui justifie que le comptage s'arrête presque sûrement.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

2. a) La variable U prend des valeurs dans $\mathbb{N}$. Réciproquement, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, l'événement $[X = k]$ a probabilité strictement positive, et conditionnellement à cet événement la boule k peut être tirée avec probabilité $1/(k+1) > 0$. Le support de U est donc exactement $\mathbb{N}$.
2. b) Pour $n \in \mathbb{N}$, l'événement $[X = n]$ a probabilité positive et l'urne contient les $n+1$ boules $0, \dots, n$. Le tirage est uniforme, donc

$$P(U = k \mid X = n) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. c) Les événements $[X = n]$ forment un système complet d'événements de probabilités positives. La formule des probabilités totales et 2b donnent

$$P(U = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{4}{3^{n+2}}.$$

C'est une série géométrique de raison $1/3$, donc sa somme est $\frac{4}{3^{k+2}} \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{2}{3^{k+1}}$.

2. d) Méthode 1 — Reconnaître une loi usuelle après décalage

Pour $j \geq 1$, $P(U + 1 = j) = 2/3^j = (2/3)(1/3)^{j-1}$. Ainsi $U + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $2/3$ sur $\mathbb{N}^*$. Cette loi admet une espérance et une variance, donc U aussi, et

$$E(U) = \frac{1}{2/3} - 1 = \frac{1}{2}, \quad V(U) = \frac{1 - 2/3}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}.$$

Méthode 2 — Calculer les moments par les séries usuelles

Pour $q = 1/3$, les séries géométriques dérivées donnent

$$\sum_{k \geq 0} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad \sum_{k \geq 0} k(k-1)q^k = \frac{2q^2}{(1-q)^3}.$$

Leurs convergences, et la positivité des termes, justifient l'existence des moments de U . En multipliant par $2/3$, on obtient $E(U) = 1/2$ et $E(U(U-1)) = 1/2$, donc $E(U^2) = 1$. La formule de Koenig-Huygens donne $V(U) = 1 - (1/2)^2 = 3/4$.

La première méthode identifie immédiatement une loi de référence ; la seconde permet de retrouver ses moments sans mémoriser une formule de décalage.

3. a) On a toujours $0 \leq U \leq X$, donc $V = X - U$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'événement $[X = k, U = 0]$ a probabilité $P(X = k)/(k+1) > 0$ et implique $V = k$. Le support de V est donc exactement $\mathbb{N}$.

3. b) Sachant $X = n$, on a $V = n - U$. L'application $k \mapsto n - k$ permute les entiers $0, \dots, n$. La loi conditionnelle de U étant uniforme sur cet ensemble, celle de V l'est également : chaque entier de 0 à n a probabilité $1/(n+1)$, et les autres probabilité nulle.

3. c) Les lois conditionnelles de U et de V sachant $X = n$ sont identiques pour tout n . Par probabilités totales, leurs lois sont identiques. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(V = k) = 2/3^{k+1}$.

En particulier, les mêmes calculs que pour U montrent que $E(V) = 1/2$ et $V(V) = 3/4$.

4. Pour $i, j \in \mathbb{N}$, les événements $[U = i, V = j]$ et $[X = i + j, U = i]$ sont égaux puisque $V = X - U$. La formule des probabilités composées donne

$$P(U = i, V = j) = P(X = i + j) \frac{1}{i + j + 1} = \frac{4}{3^{i+j+2}}.$$

Or $P(U = i)P(V = j) = (2/3^{i+1})(2/3^{j+1}) = 4/3^{i+j+2}$. L'égalité vaut pour tous les couples de valeurs possibles ; elle caractérise l'indépendance de U et V .

5. Les deux variables ont des variances finies et sont indépendantes, donc $\text{Cov}(U, V) = 0$. Comme $X = U + V$, la somme X admet aussi une variance finie et la bilinéarité de la covariance est applicable :

$$\text{Cov}(X, U) = \text{Cov}(U + V, U) = V(U) + \text{Cov}(V, U) = \frac{3}{4}.$$

Partie III : Étude d'un jeu

6. a) Code adapté en Python. La variable `piles` compte les Pile déjà obtenus, et `x` compte les Face. Un tirage uniforme inférieur à $2/3$ représente Pile.

Python

```
import numpy.random as rd

def simule_X():
    piles = 0
    x = 0
    while piles < 2:
        if rd.random() < 2 / 3:
            piles = piles + 1
        else:
            x = x + 1
    return x
```

Le retour a lieu exactement à l'obtention du deuxième Pile. Le nombre de Face accumulés possède donc la loi de X . L'arrêt est presque sûr d'après 1b.

6. b) Code adapté en Python. La fonction réalise $N = 10000$ parties indépendantes. À chaque victoire de A , elle ajoute $1/N$ à `r`. Elle renvoie donc la fréquence des

événements $[X \leq Y]$, c'est-à-dire une estimation de la probabilité de victoire de A .

Voici un code complet, incluant les fonctions nécessaires. La fonction `simule_Y` compte les Face avant le premier Pile, avec la probabilité p de Pile.

Python

```
import numpy.random as rd

def simule_X():
    piles = 0
    x = 0
    while piles < 2:
        if rd.random() < 2 / 3:
            piles = piles + 1
        else:
            x = x + 1
    return x

def simule_Y(p):
    y = 0
    while rd.random() >= p:
        y = y + 1
    return y

def mystere(p):
    r = 0
    N = 10000
    for k in range(N):
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y:
            r = r + 1 / N
    return r
```

Pour $0 < p < 1$, chaque simulation s'arrête presque sûrement. Les indicatrices des

victoires de A sont indépendantes et de même loi de Bernoulli : la loi faible des grands nombres explique la pertinence de leur fréquence comme approximation. Une réalisation aléatoire ne prouve pas une valeur exacte.

6. c) Le jeu est équilibré lorsque la probabilité de victoire de A vaut $1/2$, car les règles désignent exactement un vainqueur. L'intersection graphique avec le niveau 0,5 se situe vers $p \simeq 0,8$ à $0,85$, soit environ $0,83$. Il s'agit d'une conjecture graphique ; la question 8c donnera la valeur exacte.

7. a) Le joueur B répète des lancers indépendants jusqu'au premier Pile, qui a probabilité $p \in]0, 1[$ à chaque lancer. Par définition, Z suit la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$.

Cette loi possède une espérance $E(Z) = 1/p$ et une variance $V(Z) = (1 - p)/p^2$.

7. b) Parmi les Z lancers, le dernier est Pile et les $Z - 1$ précédents sont Face, donc $Y = Z - 1$. Le décalage préserve l'existence des deux moments, et

$$E(Y) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}, \quad V(Y) = V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

7. c) Méthode 1 — Interpréter l'événement

Pour $n \geq 1$, l'événement $Y \geq n$ signifie que les n premiers lancers sont tous Face. Leur indépendance donne $P(Y \geq n) = (1 - p)^n$. Pour $n = 0$, l'événement est certain et l'égalité reste vraie puisque $(1 - p)^0 = 1$.

Méthode 2 — Sommer la loi géométrique décalée

La relation $Y = Z - 1$ donne $P(Y = k) = p(1 - p)^k$ pour $k \geq 0$. La série géométrique de raison $1 - p \in]0, 1[$ donne, pour tout $n \geq 0$,

$$P(Y \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} p(1 - p)^k = \frac{p(1 - p)^n}{1 - (1 - p)} = (1 - p)^n.$$

La première preuve exploite directement les lancers ; la seconde retrouve la même probabilité à partir de la loi déjà identifiée.

8. a) Les variables X et Y dépendent de deux collections indépendantes de lancers, donc elles sont indépendantes. Les événements $[X = n]$ forment un système complet, et la formule des probabilités totales donne

$$P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, Y \geq n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(Y \geq n).$$

Toutes les quantités sont des probabilités positives ; cette décomposition relève des probabilités totales dénombrables, sans échange de sommes signées.

8. b) Substituons les formules de 1b et 7c :

$$P(X \leq Y) = \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{1-p}{3} \right)^n.$$

La raison $q = (1-p)/3$ appartient à $]0, 1/3[$. La somme géométrique dérivée vaut

$$\sum_{n \geq 0} (n+1)q^n = 1/(1-q)^2.$$

Par conséquent,

$$P(X \leq Y) = \frac{4}{9(1 - (1-p)/3)^2} = \frac{4}{(2+p)^2}.$$

8. c) Le jeu est équilibré si et seulement si $4/(2+p)^2 = 1/2$, soit $(2+p)^2 = 8$. Comme $2+p > 0$, cela équivaut à $2+p = 2\sqrt{2}$, puis à

$$p = 2\sqrt{2} - 2 \simeq 0,828.$$

Cette valeur appartient bien à $]0, 1[$, puisque $1 < \sqrt{2} < 3/2$. C'est l'unique solution admissible et elle confirme la conjecture graphique.

Relevé des adaptations

Exercice 2, partie IV et questions 13 à 15 : rectification d'une erreur du domaine source. Le quadrant strict imprimé exclut $(a, \ln(a))$ puisque $a < 1$. Il est remplacé par l'ouvert $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, permettant de conserver intégralement l'étude des deux points critiques demandés.

Exercice 2, questions 7a et 7b : Code adapté en Python, avec documentation de `numpy.log`, en conservant le comportement de l'algorithme et la condition à compléter dans le sujet.

Exercice 3, préambule et partie III : indépendance des lancers, des deux joueurs et des répétitions explicitée ; elle est nécessaire aux lois et probabilités demandées.

Exercice 3, questions 6a et 6b : Code adapté en Python, commande de simulation uniforme documentée ; fonctions complètes et indices de boucle convertis.

Exercice 3, question 6c : La figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. Les axes sont calibrés sur les graduations extrêmes 0 et 1. La courbe empirique légèrement irrégulière est conservée, sans lui substituer la probabilité théorique exacte.