



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2017

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie I — Étude de la fonction f

1. a) Les fonctions exponentielle et logarithme sont de classe C^∞ sur leur domaine.

Leur combinaison f est donc de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et

$$f'(x) = e^x - \frac{e}{x}, \quad f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}.$$

1. b) Pour tout $x > 0$, les deux termes de $f''(x)$ sont strictement positifs. La fonction f' est donc strictement croissante.

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $e^x \rightarrow 1$ et $-e/x \rightarrow -\infty$, d'où $f'(x) \rightarrow -\infty$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$ et $e/x \rightarrow 0$, donc $f'(x) \rightarrow +\infty$. Enfin, $f'(1) = e - e = 0$.

x	0^+	1	$+\infty$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$

Ainsi, $f'(x) < 0$ sur $]0, 1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$.

2. Le signe de f' montre que f décroît strictement sur $]0, 1]$ et croît strictement sur $[1, +\infty[$. Elle atteint son minimum global en 1, de valeur $f(1) = e$.

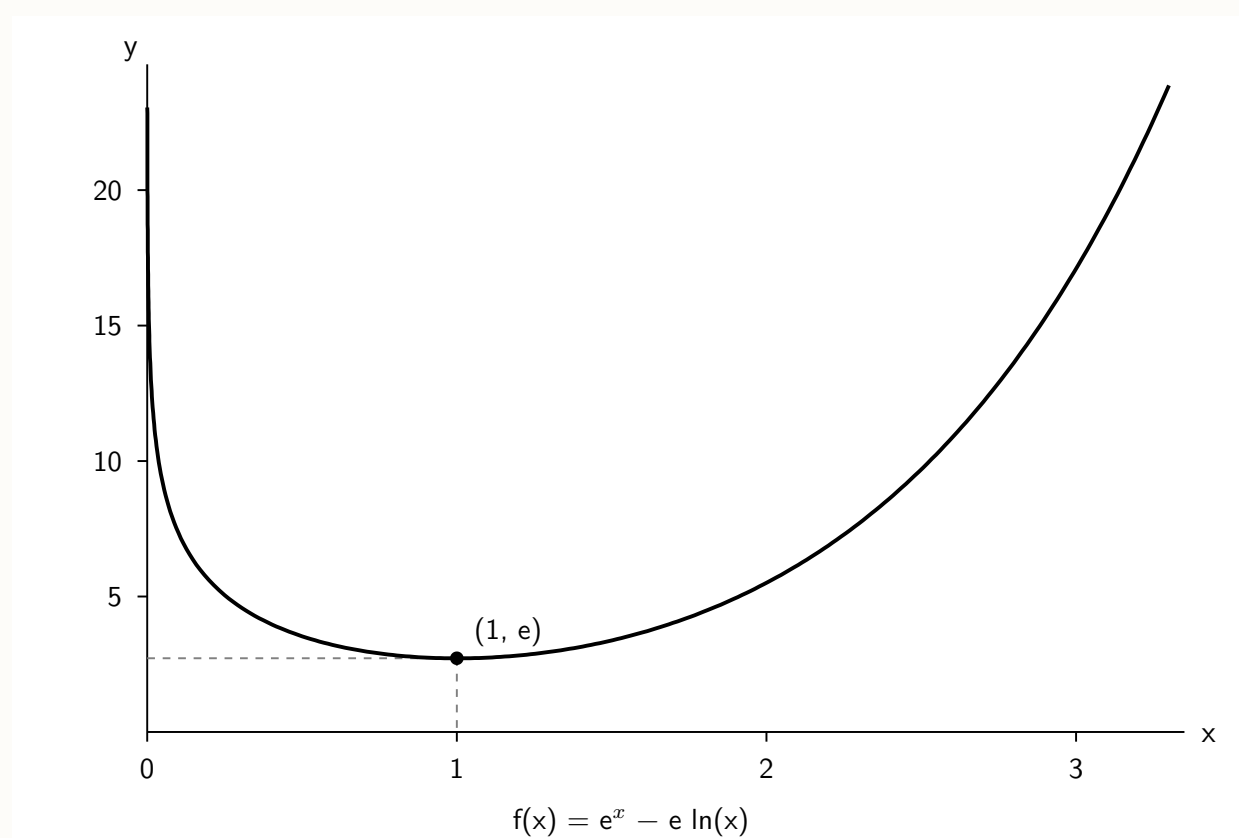
Au voisinage de 0^+ , $e^x \rightarrow 1$ et $-e \ln x \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

À l'infini, pour $x \geq 1$, on a $0 \leq \ln x \leq x$ et $xe^{-x} \rightarrow 0$ par croissance comparée. Ainsi $e \ln(x)e^{-x} \rightarrow 0$, et

$$f(x) = e^x(1 - e \ln(x)e^{-x}) \rightarrow +\infty.$$

x	0^+	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	e	$\nearrow +\infty$

3. La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale. La courbe descend jusqu'au point $(1, e)$, où sa tangente est horizontale, puis remonte vers $+\infty$. Comme $f'' > 0$, la courbe est strictement convexe. Le tracé suivant est calculé à partir de la formule exacte ; les deux axes ont des échelles différentes.



4. a) Pour éviter toute confusion avec la suite de la partie II, u désigne ici la fonction de l'énoncé. Elle est dérivable et

$$u'(x) = f''(x) - 1 = e^x - 1 + \frac{e}{x^2} > 0 \quad (x > 0).$$

Donc u est strictement croissante. On a $u(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, et

$$u(x) = e^x - e/x - x \rightarrow +\infty \text{ à l'infini, puisque } x/e^x \rightarrow 0.$$

4. b) La fonction u est continue, strictement croissante, et ses limites sont $-\infty$ et $+\infty$. Le théorème de la bijection montre qu'elle s'annule en un unique réel $\alpha > 0$. Cela équivaut exactement à $f'(\alpha) = \alpha$.

On calcule $u(1) = -1 < 0$ et, à l'aide des encadrements donnés,

$$u(2) = e^2 - \frac{e}{2} - 2 > 7,3 - 1,4 - 2 = 3,9 > 0.$$

Par stricte croissance de u , on conclut $1 < \alpha < 2$.

Partie II — Étude d'une suite, étude d'une série

5. On raisonne par récurrence. Initialement, $u_0 = 2$ est défini et vérifie l'inégalité demandée. Si u_n est défini et $u_n \geq 2$, alors $u_n > 0$ appartient au domaine de f , donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est défini. Le minimum global de f vaut $e > 2$, d'où $u_{n+1} \geq e > 2$.

La récurrence établit que tous les termes existent et sont supérieurs ou égaux à 2.

6. a) Sur $[2, +\infty[$, on a $g'(x) = f'(x) - 1$. Comme f' est croissante,

$$g'(x) \geq f'(2) - 1 = e^2 - \frac{e}{2} - 1 > 7,3 - 1,4 - 1 = 4,9 > 0.$$

Ainsi g est strictement croissante. De plus,

$$g(2) = e^2 - e \ln 2 - 2 > 7,3 - 2,8 \times 0,7 - 2 = 3,34 > 0.$$

Donc $g(x) > 0$ pour tout $x \geq 2$.

6. b) Pour tout n , la question 5 donne $u_n \geq 2$ et la question 6. a) donne

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) > 0.$$

La suite est donc strictement croissante, ce qui implique la croissance demandée.

7. Une suite croissante converge vers une limite finie si elle est majorée ; sinon elle tend vers $+\infty$. Supposons que (u_n) ait une limite finie ℓ . La question 5 impose $\ell \geq 2$; f est continue en ℓ , et le passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ donne $\ell = f(\ell)$, soit $g(\ell) = 0$.

C'est impossible puisque g est strictement positive sur $[2, +\infty[$. La suite n'est donc pas majorée et $u_n \rightarrow +\infty$.

8. Code adapté en Python. On part du terme de rang 0 et on poursuit tant que le seuil n'est pas atteint.

Python

```
from numpy import exp, log

def seuil(A):
    u = 2.0
    N = 0
    while u < A:
        u = exp(u) - exp(1) * log(u)
        N = N + 1
    return N
```

Au début de chaque passage, u contient u_N . Une itération calcule u_{N+1} et incrémente le rang. La divergence vers $+\infty$ prouvée en 7 garantit, en arithmétique réelle exacte, la terminaison pour tout réel A . Si $A \leq 2$, la boucle est vide et renvoie correctement 0. À la sortie, $u_N \geq A$; les rangs précédents n'atteignaient pas ce seuil.

Les termes croissent très rapidement : pour des seuils gigantesques, les nombres flottants peuvent déborder. Cela relève de la représentation numérique des réels, et non de la preuve de terminaison de l'algorithme mathématique.

9. a) Posons $h(x) = x - 2 \ln x$ pour $x \geq 2$. Sa dérivée vaut $h'(x) = 1 - 2/x \geq 0$. Comme $h(2) = 2 - 2 \ln 2 > 2 - 1,4 > 0$, on obtient $2 \ln x \leq x$.

Posons ensuite $v(x) = e^x - 3x$. Pour $x \geq 2$, $v'(x) = e^x - 3 \geq e^2 - 3 > 0$, et $v(2) = e^2 - 6 > 1,3 > 0$. Donc $e^x \geq 3x$, ce qui équivaut à $x \leq e^x/3$.

Les deux inégalités sont ainsi établies sur tout $[2, +\infty[$.

9. b) Comme $u_n \geq 2$, les inégalités précédentes donnent $\ln(u_n) \leq u_n/2$ et $e^{u_n} \geq 3u_n$. Par conséquent,

$$u_{n+1} = e^{u_n} - e \ln(u_n) \geq 3u_n - \frac{e}{2}u_n = \frac{6-e}{2}u_n.$$

9. c) Posons $c = (6-e)/2$. Puisque $e < 2,8$, on a $c > 1,6 > 1$. La question 9. b) donne, par récurrence à partir de $u_0 = 2$,

$$u_n \geq 2c^n \quad \text{puis} \quad 0 < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}c^{-n}.$$

Pour chaque entier $p \geq 0$, les sommes partielles satisfont

$$0 \leq \sum_{n=0}^p \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p c^{-n} \leq \frac{1}{2(1-c^{-1})}.$$

Ces sommes partielles sont croissantes, car les termes sont positifs, et majorées par une constante indépendante de p . Elles convergent donc. La série

$$\sum_{n \geq 0} 1/u_n$$

est convergente. Cette preuve utilise directement la convergence monotone des suites et la somme géométrique finie.

Partie III — Étude d'intégrales généralisées

10. Question adaptée au programme actuel : le calcul à la borne finie singulière est guidé par une intégration par parties sur un segment.

Pour $0 < \varepsilon < 1$, la fonction logarithme est de classe C^1 sur $[\varepsilon, 1]$. Une intégration par parties donne

$$\int_{\varepsilon}^1 \ln x \, dx = [x \ln x]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 1 \, dx = -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon.$$

Par croissance comparée, $\varepsilon \ln \varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. En intégrant aussi l'exponentielle sur ce segment,

$$\int_{\varepsilon}^1 f(x) \, dx = e - e^{\varepsilon} - e(-1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon).$$

Le membre de droite possède une limite finie $2e - 1$. L'intégrale impropre converge donc et

$$\int_0^1 f(x) \, dx = 2e - 1.$$

11. D'après la question 2, $f(x) \geq e > 0$ pour tout $x > 0$. Pour $b \geq 1$,

$$\int_1^b f(x) \, dx \geq e(b - 1) \rightarrow +\infty.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$ diverge vers $+\infty$.

12. Les inégalités de la question 9. a) impliquent, pour $x \geq 2$,

$$f(x) = e^x - e \ln x \geq e^x - \frac{e}{2}x \geq e^x - \frac{e}{6}e^x = \frac{6 - e}{6}e^x.$$

Le coefficient $(6 - e)/6$ est strictement positif puisque $e < 2,8 < 6$. La fonction $1/f$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$ et

$$0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{6}{6 - e}e^{-x}.$$

L'intégrale de la majorante converge, car $\int_2^b e^{-x} \, dx = e^{-2} - e^{-b} \rightarrow e^{-2}$. Le critère de

comparaison des intégrales positives donne la convergence de $\int_2^{+\infty} 1/f(x) \, dx$.

Partie IV — Étude d'une fonction de deux variables réelles

13. Sur l'ouvert donné, les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(x) - y, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f'(y) - x.$$

Un point critique vérifie donc $f'(x) = y$ et $f'(y) = x$. Si $x < y$, la stricte croissance de f' donne $f'(x) < f'(y)$, soit $y < x$, une contradiction. Si $x > y$, le raisonnement symétrique conduit à la même contradiction. Ainsi $x = y$.

Le système devient alors $f'(x) = x$, dont l'unique solution est α d'après 4. b).

Réciproquement, $1 < \alpha < 2$ assure que (α, α) appartient à l'ouvert et vérifie les deux équations. C'est donc l'unique point critique.

14. a) Les dérivées secondes, continues sur l'ouvert $]1, +\infty[^2$, donnent

$$\nabla^2 F(x, y) = \begin{pmatrix} f''(x) & -1 \\ -1 & f''(y) \end{pmatrix}.$$

En posant $d = f''(\alpha) = e^\alpha + e/\alpha^2$, on obtient

$$\nabla^2 F(\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} d & -1 \\ -1 & d \end{pmatrix}.$$

14. b) Méthode 1 — Signes des valeurs propres de la hessienne

On calcule directement les produits par les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$: la hessienne leur associe respectivement $(d - 1)(1, 1)$ et $(d + 1)(1, -1)$. Ces deux vecteurs sont libres, donc ses valeurs propres sont $d - 1$ et $d + 1$.

Comme $\alpha > 1$, on a $d = e^\alpha + e/\alpha^2 > 1$. Les deux valeurs propres sont donc strictement positives. La fonction F est de classe C^2 sur un ouvert contenant son point critique : le

critère de la hessienne s'applique et établit un minimum local strict en (α, α) .

Méthode 2 — Réutiliser la fonction de la question 4

Définissons $q(t) = f(t) - t^2/2$ pour $t > 1$. Alors $q'(t) = f'(t) - t = u(t)$. La question 4 montre que cette dérivée est négative pour $1 < t < \alpha$, nulle en α , puis positive pour $t > \alpha$. La fonction q admet donc un minimum global strict en α .

Or, pour tous $x, y > 1$,

$$F(x, y) = q(x) + q(y) + \frac{(x - y)^2}{2} \geq 2q(\alpha) = F(\alpha, \alpha).$$

L'égalité exige $q(x) = q(\alpha)$ et $q(y) = q(\alpha)$, donc $x = y = \alpha$. Cette seconde méthode établit même un minimum global strict. La première donne la nature locale au moyen de la réduction de la hessienne ; la seconde exploite la structure particulière de F et permet de comparer toutes ses valeurs.

Exercice 2

Partie I — Étude de a

1. Pour $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$, on calcule

$$a(P) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 - X(\beta + 2\gamma X) = \alpha - \gamma X^2.$$

Cette expression appartient bien à E . En coordonnées dans $\mathcal{B}$, l'application envoie (α, β, γ) sur $(\alpha, 0, -\gamma)$: chacune des coordonnées dépend linéairement de celles de P . Elle est donc linéaire de E dans E , c'est-à-dire un endomorphisme.

2. a) La formule précédente donne $a(1) = 1$, $a(X) = 0$ et $a(X^2) = -X^2$. Les colonnes de la matrice sont les coordonnées de ces trois images dans $\mathcal{B}$; ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. b) Les première et troisième colonnes sont libres, et la deuxième est nulle. L'espace engendré par les colonnes a donc dimension 2 : $\text{rg}(A) = 2$.

3. Méthode 1 — Lire les coordonnées

L'égalité $a(P) = 0$ équivaut à $\alpha = \gamma = 0$, sans condition sur β . Donc

$$\text{Ker}(a) = \text{Vect}(X).$$

Les images sont exactement les polynômes $\alpha - \gamma X^2$, où α et γ parcourent $\mathbb{R}$. On obtient

$$\text{Im}(a) = \text{Vect}(1, X^2).$$

Le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$ et l'image n'est pas E ; a n'est pas bijectif.

Méthode 2 — Exploiter le rang

Le rang vaut 2, alors que $\dim E = 3$: l'application n'est pas surjective et donc pas bijective. Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(a) = 3 - 2 = 1$. Comme $a(X) = 0$ et $X \neq 0$, le noyau est $\text{Vect}(X)$. Les deux images $a(1) = 1$ et $a(X^2) = -X^2$ sont libres et l'image a dimension 2 ; elles forment donc une base de l'image. On retrouve $\text{Im}(a) = \text{Vect}(1, X^2)$.

La première méthode décrit directement les polynômes ; la seconde permet de conclure rapidement dès que le rang et quelques images sont connus.

Partie II — Étude de b

4. Pour $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$, on a

$$b(P) = (\alpha - \beta) + (\beta - 2\gamma)X + \gamma X^2.$$

Ainsi $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour un polynôme donné $Q = q_0 + q_1 X + q_2 X^2$, résoudre

$b(P) = Q$ revient au système triangulaire

$$\gamma = q_2, \quad \beta - 2\gamma = q_1, \quad \alpha - \beta = q_0.$$

Il possède l'unique solution

$$\gamma = q_2, \quad \beta = q_1 + 2q_2, \quad \alpha = q_0 + q_1 + 2q_2.$$

Tout Q a donc un unique antécédent : b est bijectif. Or

$$Q + Q' + Q'' = (q_0 + q_1 + 2q_2) + (q_1 + 2q_2)X + q_2 X^2,$$

qui est précisément cet antécédent. On a bien $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$ pour tout $Q \in E$.

5. a) La matrice B est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux tous égaux à 1. Ses valeurs propres sont donc toutes égales à 1. De plus, $b(1) = 1$, et le polynôme constant 1 est non nul : 1 est effectivement valeur propre.

Pour préciser l'espace propre, $b(P) = P$ équivaut à $P' = 0$, soit P constant. L'espace propre associé à 1 est donc $\text{Vect}(1)$.

5. b) Si b était diagonalisable, il existerait une base de E constituée de vecteurs propres. Tous devraient être dans l'unique espace propre $\text{Vect}(1)$, de dimension 1, ce qui est impossible dans l'espace E de dimension 3.

Donc b n'est pas diagonalisable.

Partie III — Étude de c

6. On calcule les images des éléments de $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} c(1) &= 2X, & c(X) &= 2X^2 - (X^2 - 1) = 1 + X^2, & c(X^2) &= 2X^3 - 2X(X^2 - 1) \\ & & & & &= 2X. \end{aligned}$$

En prenant leurs coordonnées en colonnes, on obtient

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Les première et troisième colonnes de C sont identiques. En particulier,

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Le vecteur est non nul ; l'application c n'est donc pas injective, et elle n'est pas bijective.

En termes de polynômes, $c(1 - X^2) = 0$ avec $1 - X^2 \neq 0$.

8. a) Les colonnes de C conduisent aux vecteurs suivants, dont la première coordonnée vaut 1 :

$$v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La multiplication directe donne $Cv_- = -2v_-$, $Cv_0 = 0$ et $Cv_+ = 2v_+$. Ces vecteurs sont non nuls et associés à trois valeurs propres distinctes ; ils forment une famille libre de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, donc une base.

La matrice R formée de ces colonnes est par conséquent inversible. En rangeant les valeurs propres dans l'ordre croissant, on pose

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les trois égalités de produits s'écrivent $CR = RD$. Comme R est inversible, on en déduit $C = RDR^{-1}$, avec la première ligne de R entièrement égale à 1 comme demandé.

8. b) La relation de la question 8. a) fournit une diagonalisation de la matrice de c . L'endomorphisme est donc diagonalisable. Les polynômes correspondant aux coordonnées des colonnes de R sont

$$P_- = 1 - 2X + X^2, \quad P_0 = 1 - X^2, \quad P_+ = 1 + 2X + X^2.$$

Ils forment une base de E et vérifient $c(P_-) = -2P_-$, $c(P_0) = 0$ et $c(P_+) = 2P_+$. La base demandée est (P_-, P_0, P_+) .

Partie IV — Étude de f

9. Méthode 1 — Calculer la matrice de la différence de compositions

La matrice de $b \circ a - a \circ b$ dans $\mathcal{B}$ est $BA - AB$. Avec les matrices déjà obtenues,

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

puis

$$BA - AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Appliquée aux coordonnées (α, β, γ) de P , cette matrice donne $(\beta, 2\gamma, 0)$, qui sont les coordonnées de P' . Ainsi $f(P) = P'$ pour tout $P \in E$.

Méthode 2 — Développer les deux compositions

On dérive les polynômes explicitement, avec les règles usuelles de dérivation :

$$(b \circ a)(P) = P - XP' - (P - XP')' = P - XP' + XP'',$$

$$(a \circ b)(P) = P - P' - X(P - P')' = P - P' - XP' + XP''.$$

La soustraction donne à nouveau $f(P) = P'$. La méthode matricielle se réutilise pour les puissances demandées ensuite ; le calcul direct explique l'annulation des termes en XP' et XP'' .

10. D'après 9, f est l'application de dérivation sur les polynômes de degré au plus 2.

Pour tout $P \in E$, on a donc $f^3(P) = P^{(3)} = 0$. L'application f^3 est nulle.

La matrice de f^3 est la troisième puissance de la matrice de f , donc

$$(BA - AB)^3 = 0.$$

On peut aussi le vérifier directement avec $J = BA - AB$: $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$.

Les deux vérifications sont ici la traduction du même fait dans les bases polynomiale et matricielle.

Exercice 3

Partie I — Simulation informatique

1. Code adapté en Python. Avant chaque tirage, b et r sont les effectifs présents dans l'urne. La probabilité de bleu est donc $b/(b + r)$. Un tirage bleu augmente b ; un tirage rouge augmente r ainsi que le compteur s .

Python

```
from numpy.random import random

def EML(n):
    b = 1
    r = 2
    s = 0
    for k in range(n):
        x = random()
        if x < b / (b + r):
            b = b + 1
        else:
            r = r + 1
            s = s + 1
    return s
```

Après k tirages, l'urne contient $k + 3$ boules et s compte exactement les rouges obtenues. La boucle réalise n passages, puis renvoie bien S_n . Pour $n = 0$, la boucle est vide et renvoie 0, conformément au comptage.

Les appels aléatoires utilisés pour les choix sont indépendants ; les couleurs successivement obtenues ne le sont pas, car les effectifs de l'urne évoluent.

2. Code adapté en Python. Le programme complet, avec la fonction de simulation, est :

Python

```
from numpy.random import random

def EML(n):

    b = 1
    r = 2
    s = 0

    for k in range(n):

        if random() < b / (b + r):

            b = b + 1

        else:

            r = r + 1
            s = s + 1

    return s

n = 10
m = 0
for i in range(1000):

    m = m + EML(n)

print(m / 1000)
```

Le programme répète 1000 fois une expérience de 10 tirages, en réinitialisant l'urne à chaque appel. Il affiche la moyenne des nombres de rouges obtenues dans ces expériences indépendantes.

La valeur 6,657 est donc une estimation par simulation de $E(S_{10})$. La variable S_{10} est

bornée entre 0 et 10, donc elle admet une espérance et une variance ; la loi faible des grands nombres justifie l'approche de son espérance par la moyenne d'un grand nombre de répétitions indépendantes. La question 9 donnera la valeur exacte $20/3 \simeq 6,667$. La simulation n'est pas une démonstration de cette valeur.

Partie II — Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

3. a) Méthode 1 — Probabilités composées

L'événement $[Y = n]$ correspond à $n - 1$ rouges suivies d'une bleue. Pour $n \geq 1$, les probabilités composées donnent

$$P(Y = n) = \left(\prod_{j=0}^{n-2} \frac{j+2}{j+3} \right) \frac{1}{n+2}.$$

Le produit est vide, donc égal à 1, si $n = 1$. Dans tous les cas, il vaut $2/(n+1)$; ainsi

$$P(Y = n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

La première boule bleue apparaît presque sûrement : la probabilité des m premiers tirages tous rouges est

$$\prod_{j=0}^{m-1} (j+2)/(j+3) = 2/(m+2),$$

qui tend vers 0. L'événement d'absence définitive de bleu, inclus dans chacun de ces événements, a donc une probabilité nulle. On peut fixer arbitrairement la valeur de Y sur cet événement nul sans changer sa loi.

Méthode 2 — Différence de probabilités de dépassement

Pour $m \geq 0$, le calcul précédent donne $P(Y > m) = 2/(m+2)$. Les événements de dépassement sont emboîtés, et pour $n \geq 1$,

$$P(Y = n) = P(Y > n-1) - P(Y > n) = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

La première méthode s'applique directement à un chemin de tirages ; la seconde est utile lorsque les probabilités de dépassement se calculent plus simplement que celles des valeurs exactes. On vérifie aussi la normalisation par télescope :

$$\sum_{n=1}^m 2/((n+1)(n+2)) = 1 - 2/(m+2) \rightarrow 1.$$

3. b) Les valeurs de Y sont positives. L'existence d'une espérance finie demanderait la convergence de

$$\sum_{n \geq 1} nP(Y = n) = \sum_{n \geq 1} \frac{2n}{(n+1)(n+2)}.$$

Le terme général est équivalent à $2/n$; la série harmonique diverge, et le critère d'équivalence des séries positives s'applique ici à l'étude d'une variable discrète. La série diverge donc et Y n'admet pas d'espérance finie.

De plus, $n^2 P(Y = n) = 2n^2/((n+1)(n+2)) \rightarrow 2$, si bien que la série définissant le second moment diverge également. Ainsi Y n'admet pas de variance finie.

4. L'événement $[Z = n]$ correspond à $n-1$ bleues puis une rouge. Les probabilités

composées donnent

$$P(Z = n) = \left(\prod_{j=0}^{n-2} \frac{j+1}{j+3} \right) \frac{2}{n+2} = \frac{4}{n(n+1)(n+2)} \quad (n \geq 1).$$

Pour $n = 1$, le produit vide vaut 1 et la formule donne bien $2/3$. La probabilité des m premiers tirages tous bleus est $2/((m+1)(m+2)) \rightarrow 0$; la première rouge apparaît donc presque sûrement. Comme pour Y , une valeur arbitraire sur l'événement nul d'absence définitive de rouge ne change pas la loi.

Pour l'espérance, les termes sont positifs et

$$\sum_{n=1}^m nP(Z = n) = 4 \sum_{n=1}^m \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} \right) \rightarrow 2.$$

La série converge; Z admet une espérance et $E(Z) = 2$.

En revanche,

$$n^2 P(Z = n) = \frac{4n}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{4}{n}.$$

La série positive correspondante diverge par comparaison à la série harmonique. Le second moment n'est pas fini, donc Z n'admet pas de variance finie. L'existence d'une espérance ne suffit donc pas ici à assurer celle d'une variance.

Partie III — Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

5. La variable X_k est l'indicatrice d'un tirage rouge au rang k . Le nombre total de rouges est donc

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

6. Au premier tirage, l'urne comporte deux rouges sur trois boules. Donc X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $2/3$:

$$P(X_1 = 1) = \frac{2}{3}, \quad P(X_1 = 0) = \frac{1}{3}, \quad E(X_1) = \frac{2}{3}, \quad V(X_1) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}.$$

7. a) Après un premier rouge, l'urne contient trois rouges et une bleue ; après un premier bleu, elle contient deux rouges et deux bleues. Les probabilités composées donnent

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6},$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{6},$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{6}.$$

La loi du couple est donc :

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	$1/6$	$1/6$
1	$1/6$	$1/2$

Les quatre probabilités sont positives et leur somme vaut 1.

7. b) La marginale en X_2 s'obtient en sommant les lignes :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \quad P(X_2 = 0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi X_2 suit, comme X_1 , une loi de Bernoulli de paramètre $2/3$.

7. c) L'indépendance imposerait $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$. Or

$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Les variables X_1 et X_2 ne sont donc pas indépendantes.

8. a) Lors des k premiers tirages rouges, les facteurs numérateurs sont $2, 3, \dots, k+1$.

Lors des $n-k$ tirages bleus suivants, ils sont $1, 2, \dots, n-k$. Les dénominateurs successifs, indépendamment des couleurs obtenues, sont $3, 4, \dots, n+2$.

Par probabilités composées,

$$P(R_1 \cap \dots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \dots \cap B_n) = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}.$$

La convention du produit vide, égal à 1, traite aussi $k=0$ et $k=n$; on utilise alors $0! = 1$.

8. b) Pour un chemin quelconque de n tirages comportant exactement k rouges, les facteurs au numérateur lors des rouges sont toujours $2, \dots, k+1$ et ceux des bleues toujours $1, \dots, n-k$, quel que soit leur entrelacement. Les dénominateurs sont toujours $3, \dots, n+2$. Tous ces chemins ont donc la même probabilité, calculée en 8. a).

Choisir les k positions rouges parmi les n positions peut se faire de $\binom{n}{k}$ façons, par l'interprétation usuelle du coefficient binomial. Les événements correspondant aux différents chemins sont disjoints et leur réunion est $[S_n = k]$. On obtient donc l'égalité demandée, puis

$$P(S_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

Cette loi est définie sur $\{0, \dots, n\}$. Sa normalisation se vérifie par

$$\sum_{k=0}^n (k+1) = (n+1)(n+2)/2.$$

9. La variable S_n prend un nombre fini de valeurs ; son espérance existe. Par sa loi,

$$E(S_n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n k(k+1).$$

Les formules usuelles de sommes donnent

$$\sum_{k=0}^n k(k+1) = \sum_{k=0}^n k^2 + \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

En remplaçant dans l'expression précédente, on obtient $E(S_n) = 2n/3$.

10. a) Pour chaque $k \in \{0, \dots, n\}$, la loi établie en 8. b) donne $P(S_n = k) > 0$, donc le conditionnement est défini. Sur cet événement, les n tirages ont ajouté k rouges et $n - k$ bleues : l'urne contient $k + 2$ rouges sur $n + 3$ boules.

La règle du tirage uniforme donne donc

$$P_{[S_n=k]}(X_{n+1} = 1) = \frac{k+2}{n+3}.$$

10. b) Les événements $[S_n = k]$, pour $0 \leq k \leq n$, constituent un système complet. Par la formule des probabilités totales et le résultat de 10. a),

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^n \frac{k+2}{n+3} P(S_n = k).$$

La somme est finie ; on peut séparer les termes et utiliser la définition de l'espérance :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{n+3} \left(\sum_{k=0}^n k P(S_n = k) + 2 \sum_{k=0}^n P(S_n = k) \right) = \frac{E(S_n) + 2}{n+3}.$$

10. c) En utilisant 9, on obtient

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{2n/3 + 2}{n + 3} = \frac{2}{3}.$$

Comme X_{n+1} ne prend que les valeurs 0 et 1, elle suit une loi de Bernoulli de paramètre $2/3$. Toutes les variables X_k ont ainsi la même loi, indépendamment du rang, malgré leur dépendance mise en évidence en 7. c).

Partie IV — Étude d'une convergence en loi

11. Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq S_n \leq n$, donc $0 \leq T_n \leq 1$. Si $x < 0$, l'événement $[T_n \leq x]$ est impossible et sa probabilité vaut 0. Si $x > 1$, l'événement est certain et sa probabilité vaut 1.

12. Pour $x \in [0, 1]$, posons $m = \lfloor nx \rfloor$, de sorte que $0 \leq m \leq n$. La variable S_n étant entière et $n > 0$,

$$[T_n \leq x] = [S_n \leq nx] = [S_n \leq m].$$

Les valeurs possibles étant disjointes, la loi de 8. b) donne

$$P(T_n \leq x) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^m (k+1).$$

Or

$$\sum_{k=0}^m (k+1) = (m+1)(m+2)/2.$$

On obtient donc

$$P(T_n \leq x) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}.$$

La formule inclut $x = 0$, où la probabilité vaut $2/((n+1)(n+2))$, et $x = 1$, où elle vaut 1.

- 13.** Pour $x \in [0, 1]$, l'encadrement $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$ donne $\lfloor nx \rfloor/n \rightarrow x$. En divisant les quatre facteurs de la formule précédente par n , on en déduit

$$P(T_n \leq x) = \frac{(\lfloor nx \rfloor/n + 1/n)(\lfloor nx \rfloor/n + 2/n)}{(1 + 1/n)(1 + 2/n)} \rightarrow x^2.$$

Pour $x < 0$, la limite vaut 0; pour $x > 1$, elle vaut 1 par 11. La fonction limite est donc

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, croissante, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Elle est de classe C^1 en dehors, au plus, des points 0 et 1. Une densité correspondante est

$$f_T(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elle est positive et son intégrale vaut $\int_0^1 2t \, dt = 1$. Ses limites à gauche et à droite sont finies en tout point. Elle définit donc bien une variable à densité dans le cadre demandé, et sa fonction de répartition est F_T .

La convergence des fonctions de répartition a été établie en tout réel, donc en tout point de continuité de F_T . Par définition, T_n converge en loi vers une variable T de fonction de répartition F_T et de densité f_T .

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 8 : code adapté en Python et commandes exponentielle/logarithme documentées ; le seuil et la relation de récurrence sont conservés.

Exercice 1, question 10 : indication de calcul par intégration par parties sur $[\varepsilon, 1]$, suivie du passage à la limite, ajoutée pour guider l'étude de la borne finie singulière.

Exercice 3, questions 1 et 2 : code adapté en Python, blancs préservés dans le sujet, tirage uniforme et bornes de range explicités par les programmes. Les effectifs, le nombre de répétitions et la sortie numérique fournie sont conservés.