



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2016

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On note I et A les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Partie I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2 .
2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.
3. a) Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.
b) Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que $A = PDP^{-1}$.
4. Montrer : $A^3 = 2A$.

Partie II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

5. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.

6. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM .

7. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

8. Former la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.

9. a) Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.

9. b) En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie : $\lambda^3 = 2\lambda$.

9. c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

10. L'endomorphisme f est-il bijectif? Diagonalisable?

11. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.

12. a) Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

12. b) Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$, d'inconnue $N \in \mathcal{E}$.

Exercice 2

On considère l'application $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0, +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t \ln(t) & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On admet : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

Partie I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout $t \in]0, +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
3. Dresser le tableau des variations de f . On précisera la limite de f en $+\infty$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; i, j)$.

4. a) Montrer que C admet une tangente en O et préciser celle-ci.
4. b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I , et préciser les coordonnées de I .
4. c) Tracer l'allure de C .
5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0, +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

Partie II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0, +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$, définie, pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = x \ln(y) - y \ln(x).$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$.
7. a) Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$. Montrer que (x, y) est un point critique de F si et seulement si :
$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1.$$
7. b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e) .
8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e, e) ?

Partie III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

9. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
10. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
11. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. On pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$.
12. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

La commande `np.log(t)`, après `import numpy as np`, renvoie le logarithme népérien du réel strictement positif t . La commande `print(N)` affiche la valeur de N .

Exercice 3

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par :

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}.$$

1. Vérifier que la fonction f est paire.
2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f .

3. Déterminer la fonction de répartition de X .

4. a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ converge.

4. b) En utilisant l'impairité de la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t f(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $E(X) = 0$.

Partie II : Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = \ln(1 + e^x).$$

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

6. Exprimer, pour tout $y \in I$, $\varphi^{-1}(y)$.

On définit la variable aléatoire réelle Y par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $P(Y \leq 0) = 0$.
8. Déterminer la fonction de répartition de Y .
9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

Partie III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f , où f a été définie dans la partie I.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_n = \max(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad U_n = T_n - \ln(n).$$

10. a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n .

10. b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(U_n \leq x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}.$

11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.