



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2016

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie I : Étude de la matrice A

1. Le coefficient d'indice (i, j) de A^2 est le produit de la ligne i de A par la colonne j de A . Les trois lignes ainsi obtenues sont $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$ et $(1, 0, 1)$; donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $aI + bA + cA^2 = 0$. En utilisant le calcul précédent,

$$aI + bA + cA^2 = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}.$$

Le coefficient $(1, 3)$ impose $c = 0$, le coefficient $(1, 2)$ impose $b = 0$, puis le coefficient $(1, 1)$ impose $a = 0$. Toute combinaison linéaire nulle a donc ses trois coefficients nuls : la famille (I, A, A^2) est libre.

3. a) La matrice A est réelle et symétrique, car ${}^tA = A$. Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable : ce résultat admis du programme s'applique ici et donne la conclusion sans rechercher les valeurs propres.

3. b) Cherchons d'abord des vecteurs dont le premier coefficient vaut 1. Les vecteurs $v_- = {}^t(1, -\sqrt{2}, 1)$, $v_0 = {}^t(1, 0, -1)$ et $v_+ = {}^t(1, \sqrt{2}, 1)$ vérifient directement

$$Av_- = -\sqrt{2}v_-, \quad Av_0 = 0, \quad Av_+ = \sqrt{2}v_+.$$

Par exemple, ${}^t(A(1, z, 1)) = {}^t(z, 2, z)$, qui vaut ${}^t(z(1, z, 1))$ lorsque $z^2 = 2$; le vecteur v_0 se lit en annulant le coefficient central et en prenant deux coefficients opposés aux extrémités.

Ces trois vecteurs propres non nuls sont associés à des valeurs propres distinctes. Ils sont donc linéairement indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

conviennent : P est inversible, $AP = PD$, donc $A = PDP^{-1}$. La première ligne de P est bien $(1, 1, 1)$ et les coefficients diagonaux de D sont strictement croissants. Si l'on souhaite expliciter l'inverse, la résolution des coordonnées donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

4. Méthode 1 — Produit matriciel direct

Le produit de A^2 obtenu en question 1 par A donne les lignes $(0, 2, 0)$, $(2, 0, 2)$ et $(0, 2, 0)$. Par conséquent,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A.$$

Méthode 2 — Utiliser la diagonalisation

Les trois coefficients diagonaux $d \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ vérifient $d^3 = 2d$, donc $D^3 = 2D$.

Comme $A = PDP^{-1}$ et que les facteurs $P^{-1}P$ s'éliminent dans un produit fini,

$$A^3 = PD^3P^{-1} = 2PDP^{-1} = 2A.$$

La première méthode vérifie l'identité par ses coefficients ; la seconde montre comment une identité scalaire sur les coefficients diagonaux fournit ici une identité matricielle.

Partie II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

5. La formule développée en question 2 montre exactement que

$$\mathcal{E} = \{aI + bA + cA^2; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(I, A, A^2).$$

Un ensemble de combinaisons linéaires de matrices fixées est un sous-espace vectoriel : il contient la matrice nulle et reste stable par somme et multiplication par un réel. La famille (I, A, A^2) engendre donc $\mathcal{E}$; elle est libre d'après la question 2. C'est une base de $\mathcal{E}$, et $\dim(\mathcal{E}) = 3$.

6. Toute matrice $M \in \mathcal{E}$ s'écrit $M = aI + bA + cA^2$. Grâce à $A^3 = 2A$,

$$AM = aA + bA^2 + cA^3 = (a + 2c)A + bA^2.$$

C'est une combinaison linéaire de I, A, A^2 , donc $AM \in \mathcal{E}$. L'application annoncée est ainsi bien définie de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

7. Pour $M, N \in \mathcal{E}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la distributivité du produit matriciel donne

$$f(\alpha M + \beta N) = A(\alpha M + \beta N) = \alpha AM + \beta AN = \alpha f(M) + \beta f(N).$$

L'application f est linéaire et, d'après la question 6, prend ses valeurs dans $\mathcal{E}$. C'est donc un endomorphisme de l'espace concret $\mathcal{E}$.

8. On calcule les images des trois vecteurs de la base : $f(I) = A$, $f(A) = A^2$, $f(A^2) = 2A$. Leurs colonnes de coordonnées dans l'ordre (I, A, A^2) sont respectivement ${}^t(0, 1, 0)$, ${}^t(0, 0, 1)$ et ${}^t(0, 2, 0)$. Ainsi,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Concrètement, la colonne ${}^t(a, b, c)$ de M est envoyée sur ${}^t(0, a + 2c, b)$. Nous utiliserons cette représentation pour les éléments propres de f .

9. a) Pour tout $M \in \mathcal{E}$, l'associativité du produit et la question 4 donnent

$$(f \circ f \circ f)(M) = A(A(AM)) = A^3M = 2AM = 2f(M).$$

Les deux applications coïncident donc en toute matrice M de $\mathcal{E}$: $f \circ f \circ f = 2f$. En coordonnées, cette identité s'écrit également $F^3 = 2F$.

9. b) Soit $M \neq 0$ un vecteur propre de f associé à $\lambda \in \mathbb{R}$. En appliquant trois fois la relation $f(M) = \lambda M$, on obtient $f^3(M) = \lambda^3 M$. Or $f^3(M) = 2f(M) = 2\lambda M$. Ainsi,

$$(\lambda^3 - 2\lambda)M = 0.$$

Comme $M \neq 0$, on a $\lambda^3 = 2\lambda$, donc $\lambda(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2}) = 0$. Les seules valeurs propres possibles sont 0 , $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$; il reste à vérifier qu'elles sont effectivement obtenues.

9. c) Dans les coordonnées (a, b, c) de la question 8, l'équation $f(M) = \lambda M$ équivaut à

$$0 = \lambda a, \quad a + 2c = \lambda b, \quad b = \lambda c.$$

Pour $\lambda = 0$, on obtient $b = 0$ et $a = -2c$, donc

$$E_0(f) = \text{Vect}(A^2 - 2I).$$

Pour $\lambda = \pm\sqrt{2}$, le réel λ est non nul, donc $a = 0$ et $b = \lambda c$. La deuxième équation est

alors satisfaite car $\lambda^2 = 2$. Par conséquent,

$$E_{-\sqrt{2}}(f) = \text{Vect}(A^2 - \sqrt{2}A), \quad E_{\sqrt{2}}(f) = \text{Vect}(A^2 + \sqrt{2}A).$$

Les trois matrices génératrices sont non nulles, car leurs coordonnées dans une base ne sont pas toutes nulles. Les trois valeurs candidates sont donc effectivement propres. Le calcul a porté sur la matrice concrète F et n'utilise pas de déterminant.

- 10.** La matrice non nulle $A^2 - 2I$ appartient au noyau de f . Ainsi, f n'est pas injectif et n'est donc pas bijectif.

Les trois matrices $A^2 - 2I$, $A^2 - \sqrt{2}A$, $A^2 + \sqrt{2}A$ sont des vecteurs propres associés à trois valeurs propres distinctes. Elles forment une famille libre de trois matrices dans l'espace $\mathcal{E}$ de dimension 3, donc une base. Dans cette base, la matrice de f est diagonale. Ainsi, f est diagonalisable, bien qu'il ne soit pas bijectif.

- 11.** La formule $f(aI + bA + cA^2) = (a + 2c)A + bA^2$ montre que $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(A, A^2)$. Réciproquement, $A = f(I)$ et $A^2 = f(A)$ appartiennent à l'image. On a donc

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(A, A^2).$$

La famille (A, A^2) est libre comme sous-famille de (I, A, A^2) : c'est une base de l'image. La question 9c donne

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(A^2 - 2I),$$

dont une base est $(A^2 - 2I)$. Les dimensions obtenues, 2 et 1, ont bien pour somme $\dim(\mathcal{E}) = 3$, conformément au théorème du rang.

- 12. a)** Toute image par f a un coefficient nul sur I dans la base (I, A, A^2) . Or $I + A^2$ a pour coordonnées $(1, 0, 1)$; il n'appartient donc pas à $\text{Im}(f)$. L'équation n'a aucune solution.

- 12. b)** Écrivons $N = aI + bA + cA^2$. L'égalité

$$(a + 2c)A + bA^2 = A + A^2$$

équivalent, par liberté de la base, à $a + 2c = 1$ et $b = 1$. Le paramètre c est libre. Toutes les solutions, et seulement elles, sont donc

$$N = (1 - 2c)I + A + cA^2 = I + A + c(A^2 - 2I), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cette dernière écriture retrouve une solution particulière $I + A$ à laquelle on ajoute une matrice du noyau.

Exercice 2

Partie I : Étude de la fonction f

1. Pour $t > 0$, les fonctions t^2 et $t \ln(t)$ sont continues. Lorsque $t \rightarrow 0^+$, la croissance comparée usuelle donne $t \ln(t) \rightarrow 0$, tandis que $t^2 \rightarrow 0$. Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0 = f(0).$$

La fonction est donc continue sur tout son domaine $[0, +\infty[$.

2. Le logarithme est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$; les opérations qui définissent f préservent cette régularité. Pour $t > 0$,

$$f'(t) = 2t - \ln(t) - 1, \quad f''(t) = 2 - \frac{1}{t}.$$

3. Le signe de f'' est négatif sur $]0, \frac{1}{2}[$ et positif sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$. Ainsi, f' décroît puis croît et atteint son minimum en $\frac{1}{2}$. Ce minimum vaut

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \ln(2) > 0.$$

Par conséquent, $f'(t) > 0$ pour tout $t > 0$: f est strictement croissante. Pour la limite à l'infini, on écrit

$$f(t) = t^2 \left(1 - \frac{\ln(t)}{t} \right).$$

Comme $\ln(t)/t \rightarrow 0$, le facteur entre parenthèses tend vers 1 ; ainsi $f(t) \rightarrow +\infty$. Le tableau est

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		+	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La stricte croissance sur l'intervalle incluant 0 se vérifie aussi au bord : pour $t > 0$, $f(t) > f(t/2)$ et, par continuité en 0, $f(t/2) \geq f(0)$.

4. a) Le taux d'accroissement en 0, par la droite, est

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = t - \ln(t) \rightarrow +\infty.$$

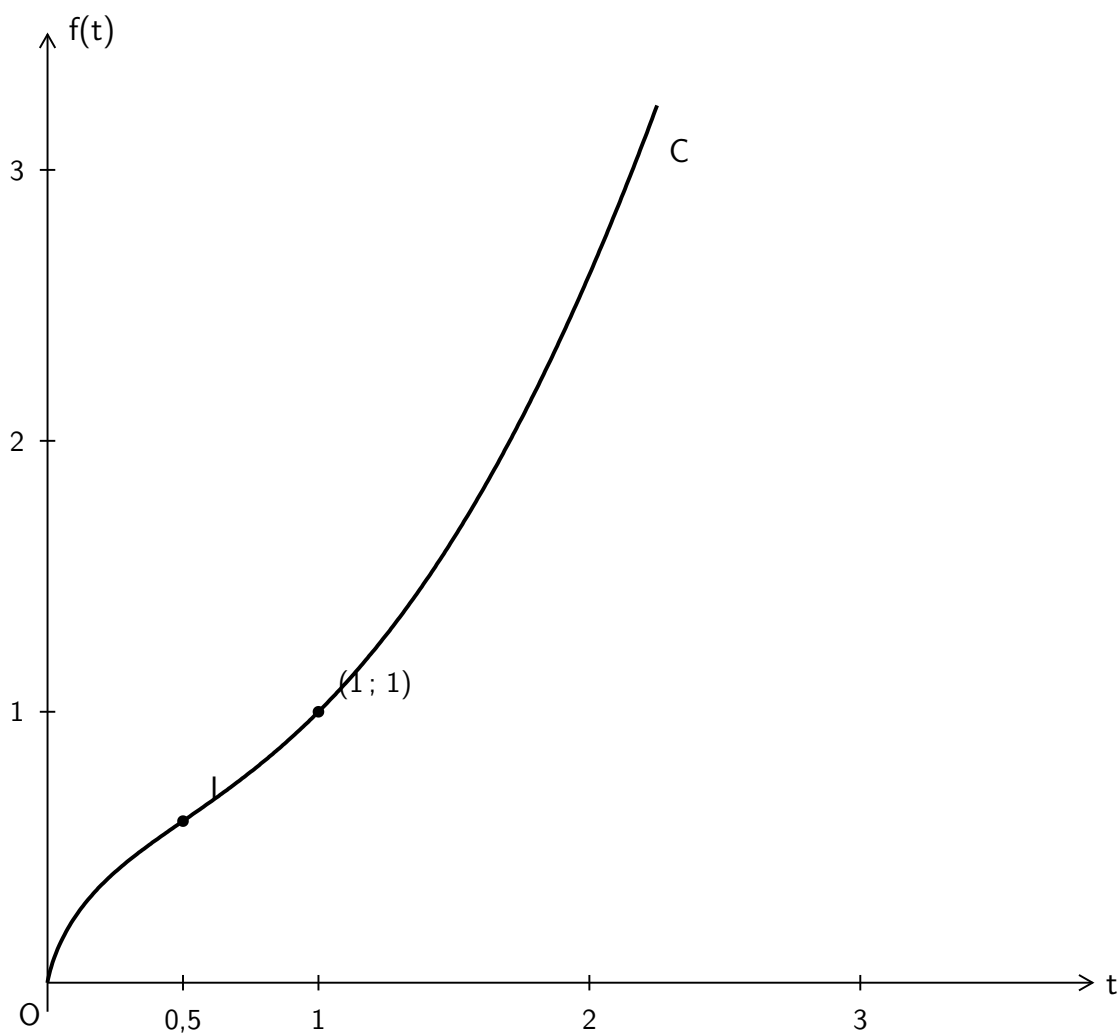
La courbe possède donc en O une demi-tangente verticale d'équation $t = 0$, dirigée vers les ordonnées positives. Cette conclusion résulte du taux d'accroissement et ne suppose pas l'existence d'une dérivée finie en 0.

4. b) D'après la question 2, f'' ne s'annule qu'en $t = \frac{1}{2}$, en changeant de signe. La courbe est concave avant ce point et convexe après : elle admet exactement un point d'inflexion,

$$I = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \right).$$

L'encadrement donné dans le sujet entraîne $0,595 < f(\frac{1}{2}) < 0,600$.

4. c) On utilise la croissance stricte, la demi-tangente verticale en O , le changement de convexité en I et le point $(1, 1)$, puisque $f(1) = 1$. La courbe est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé, avec la même échelle sur les deux axes ; ses points sont calculés à partir de la formule de f .



La partie représentée s'arrête à $t = 2,25$; la courbe se poursuit en croissant vers $+\infty$ et reste convexe pour $t > \frac{1}{2}$.

5. La fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc l'équation $f(t) = 1$ admet au plus une solution. Or $f(1) = 1^2 - 1 \ln(1) = 1$. Elle admet donc exactement une solution, $t = 1$.

Partie II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

6. Le domaine $]0, +\infty[^2$ est un ouvert, comme précisé dans l'énoncé, et F y est de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout point de ce domaine,

$$\partial_1 F(x, y) = \ln(y) - \frac{y}{x}, \quad \partial_2 F(x, y) = \frac{x}{y} - \ln(x).$$

7. a) Un point (x, y) est critique si et seulement si les deux dérivées partielles calculées en question 6 sont nulles. La seconde donne

$$\ln(x) = \frac{x}{y} > 0,$$

donc $x > 1$ et $y = x/\ln(x)$. En posant $t = \ln(x) > 0$, la première équation devient

$$\ln\left(\frac{x}{\ln(x)}\right) = \frac{1}{\ln(x)}, \quad \text{soit} \quad t - \ln(t) = \frac{1}{t}.$$

La multiplication par $t > 0$ donne $t^2 - t \ln(t) = 1$, c'est-à-dire $f(\ln(x)) = 1$.

Réciproquement, si les trois conditions de l'énoncé sont satisfaites, alors $t = \ln(x) > 0$, $y = x/t$ et $f(t) = 1$. En divisant la dernière égalité par t , on a $t - \ln(t) = 1/t$. Or $\ln(y) = \ln(x) - \ln(t) = t - \ln(t) = 1/t = y/x$, et $x/y = t = \ln(x)$. Les deux dérivées partielles s'annulent. L'équivalence est ainsi établie dans les deux sens.

7. b) La question 5 montre que $f(\ln(x)) = 1$ équivaut à $\ln(x) = 1$. Ainsi, le seul candidat est $x = e$, puis $y = e/1 = e$. Ce point appartient bien au domaine et vérifie les deux équations ; c'est l'unique point critique de F .

8. Méthode 1 — Hessienne et valeurs propres

En dérivant les expressions de la question 6, on obtient, sur l'ouvert considéré,

$$\nabla^2 F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2} & \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Au point critique (e, e) , cette matrice vaut

$$\nabla^2 F(e, e) = \begin{pmatrix} \frac{1}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e} \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, $1/e > 0$ et $-1/e < 0$. La fonction étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert contenant le point critique, le critère du programme s'applique : (e, e) est un point selle et F n'y admet aucun extremum local.

Méthode 2 — Deux restrictions d'une variable

On a $F(e, e) = 0$. Sur la droite $y = e$, $F(x, e) = x - e \ln(x)$ et sa dérivée vaut $1 - e/x$. Elle est négative pour $x < e$ et positive pour $x > e$, donc $F(x, e) > 0$ pour tout $x > 0$ différent de e . Sur la droite $x = e$, on a $F(e, y) = e \ln(y) - y = -F(y, e) < 0$ dès que $y \neq e$.

Tout voisinage de (e, e) contient donc des points où $F > 0$ et d'autres où $F < 0$: aucun extremum local n'est possible. La hessienne fournit le critère réutilisable ; les restrictions donnent ici une vérification directe des deux comportements opposés.

Partie III : Étude d'une suite récurrente

9. La fonction f est croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} > \frac{1}{4} + \frac{0,69}{2} > \frac{1}{2}, \quad f(1) = 1.$$

Elle envoie donc $[\frac{1}{2}, 1]$ dans lui-même. Le terme initial $u_0 = \frac{1}{2}$ appartient à cet intervalle. Si u_n y appartient, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ y appartient également. Une récurrence donne l'inclusion annoncée pour tout $n \in \mathbb{N}$; en particulier, tous les termes sont bien définis.

10. Méthode 1 — Propager la croissance par la fonction f

La question 9 donne $u_1 = f(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2} = u_0$. Si $u_{n+1} > u_n$, la stricte croissance de f entraîne $u_{n+2} = f(u_{n+1}) > f(u_n) = u_{n+1}$. Par récurrence, la suite est même strictement croissante.

Méthode 2 — Étudier directement la différence

Pour $t > 0$, posons $g(t) = t - \ln(t)$. On a $g'(t) = 1 - 1/t$, donc g décroît sur $]0, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$ et atteint son minimum $g(1) = 1$. Pour tout n , puisque $u_n > 0$,

$$u_{n+1} - u_n = u_n(u_n - \ln(u_n) - 1) = u_n(g(u_n) - 1) \geq 0.$$

La suite est donc croissante. La première méthode exploite la monotonie de la récurrence; la seconde identifie directement le signe des accroissements, et prépare l'équation de la limite.

11. La suite est croissante d'après la question 10 et majorée par 1 d'après la question 9.

Elle converge donc vers un réel $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$. La fonction f étant continue sur cet intervalle, le passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ donne $\ell = f(\ell)$.

Comme $\ell \geq \frac{1}{2} > 0$, on peut diviser cette égalité par ℓ : elle équivaut à

$$\ell - \ln(\ell) = 1.$$

La fonction $g(t) = t - \ln(t)$ étudiée dans la seconde méthode de la question 10 atteint la valeur 1 seulement en $t = 1$. Plus explicitement, elle est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et $g(1) = 1$, donc $g(t) > 1$ pour $0 < t < 1$. On en déduit $\ell = 1$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

12. Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python; le logarithme est documenté dans le sujet.

On initialise le rang à 0 et la valeur du terme à $u_0 = 0,5$. Tant que l'inégalité stricte demandée n'est pas satisfaite, on calcule le terme suivant et on augmente le rang :

Python

```
import numpy as np

N = 0
u = 0.5

while 1 - u >= 1e-4:
    u = u * u - u * np.log(u)
    N = N + 1

print(N)
```

À chaque début de test, u contient le terme de rang N . Le test utilise $\geq$ parce que la condition d'arrêt est strictement $1 - u_N < 10^{-4}$. La question 11 garantit l'existence d'un rang satisfaisant cette condition en arithmétique réelle. Le programme affiche le premier rang trouvé. Le code a été exécuté ; il affiche 19994, avec une valeur numérique $u \simeq 0,9999000022$. L'argument de terminaison vient de la preuve de convergence, et non de cette exécution.

Exercice 3

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, multiplier le numérateur et le dénominateur de $f(-t)$ par $e^{-2t} > 0$ donne

$$f(-t) = \frac{e^t}{(1 + e^t)^2} = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} = f(t).$$

La fonction est donc paire.

2. La fonction f est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, car son dénominateur est strictement positif. Posons $G(t) = 1/(1 + e^{-t})$. La dérivation donne

$$G'(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} = f(t).$$

Pour tout segment $[a, b]$, on a donc $\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$. Or $G(a) \rightarrow 0$ lorsque $a \rightarrow -\infty$ et $G(b) \rightarrow 1$ lorsque $b \rightarrow +\infty$. Les deux intégrales aux extrémités convergent, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

La positivité, la continuité et la normalisation prouvent que f est une densité. Elle possède de plus des limites finies en tout réel, comme l'exige le cadre considéré.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la primitive utilisée précédemment donne

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = G(x) - 0 = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

4. a) Pour $t \geq 0$, le dénominateur de $f(t)$ est au moins égal à 1, donc

$$0 \leq tf(t) \leq te^{-t}.$$

Pour $b > 0$, une intégration par parties sur le segment $[0, b]$ donne

$$\int_0^b te^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^b + \int_0^b e^{-t} dt = 1 - (b + 1)e^{-b}.$$

Le dernier terme tend vers 1 lorsque $b \rightarrow +\infty$. L'intégrale de référence converge; par comparaison de fonctions continues positives, $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$ converge également.

4. b) Puisque f est paire, la fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire et la fonction $t \mapsto |t|f(t)$ est paire. Pour $b > 0$, le changement de variable affine $t = -s$ sur le segment $[-b, 0]$ donne

$$\int_{-b}^0 |t|f(t) dt = \int_0^b sf(s) ds.$$

En passant à la limite, la convergence établie en 4a montre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} tf(t) dt < +\infty.$$

L'espérance de X existe donc. Les deux intégrales signées sont convergentes et opposées par l'imparité, d'où $E(X) = 0$. La vérification de la convergence absolue est indispensable : la seule compensation sur des segments symétriques ne suffirait pas à définir une espérance.

Partie II : Étude d'une autre variable aléatoire

5. La fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\varphi'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0.$$

Elle est donc strictement croissante. Lorsque $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0$ et $\varphi(x) \rightarrow 0$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $\varphi(x) \geq \ln(e^x) = x$, donc $\varphi(x) \rightarrow +\infty$. Par le théorème de la bijection pour une fonction continue strictement monotone sur un intervalle, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$I =]0, +\infty[.$$

6. Pour $y > 0$, l'équation $y = \ln(1 + e^x)$ équivaut à $e^y = 1 + e^x$, puis à $e^x = e^y - 1$. Le membre de droite est strictement positif, donc on peut en prendre le logarithme. Ainsi,

$$\varphi^{-1}(y) = \ln(e^y - 1), \quad y \in]0, +\infty[.$$

7. Pour tout réel x , on a $1 + e^x > 1$, donc $\varphi(x) > 0$. Comme X est une variable aléatoire réelle, $Y = \varphi(X) > 0$ pour toute réalisation. L'événement $\{Y \leq 0\}$ est vide et sa probabilité est nulle.

8. Pour $y \leq 0$, la question 7 donne $F_Y(y) = 0$. Pour $y > 0$, la stricte croissance de φ donne l'égalité d'événements

$$\{\varphi(X) \leq y\} = \{X \leq \ln(e^y - 1)\}.$$

La question 3 permet donc de calculer

$$F_Y(y) = \frac{1}{1 + e^{-\ln(e^y - 1)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^y - 1}} = \frac{e^y - 1}{e^y} = 1 - e^{-y}.$$

Toutes les divisions sont licites puisque $e^y - 1 > 0$. Finalement,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0, \\ 1 - e^{-y} & \text{si } y > 0. \end{cases}$$

9. C'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi $Y \sim \mathcal{E}(1)$.

Les moments de cette loi usuelle existent et donnent, sans calcul d'intégrale supplémentaire,

$$E(Y) = 1, \quad V(Y) = 1.$$

Partie III : Étude d'une convergence en loi

10. a) Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, l'événement $\{T_n \leq x\}$ est l'intersection des n événements $\{X_k \leq x\}$. Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et ont toutes la même fonction de répartition F_X . Par conséquent,

$$F_{T_n}(x) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x) = (F_X(x))^n = (1 + e^{-x})^{-n}.$$

10. b) Pour tout réel x , la définition de U_n donne

$$P(U_n \leq x) = P(T_n \leq x + \ln(n)).$$

Puisque $e^{-(x+\ln(n))} = e^{-x}/n$, la formule de 10a entraîne

$$F_{U_n}(x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}.$$

La translation est ici traitée directement par les fonctions de répartition.

11. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $a = e^{-x} > 0$. Le quotient $\ln(1+h)/h$ tend vers 1 lorsque $h \rightarrow 0$, par exemple par la définition de la dérivée du logarithme en 1. Ainsi,

$$n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = a \frac{\ln(1 + a/n)}{a/n} \rightarrow a.$$

Par continuité de l'exponentielle,

$$F_{U_n}(x) = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right) \rightarrow H(x) = \exp(-e^{-x}).$$

Il faut vérifier que cette limite décrit bien une loi à densité. La fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$h(x) = H'(x) = e^{-x} \exp(-e^{-x}) > 0.$$

On a $H(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow -\infty$ et $H(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. En calculant sur un segment puis en passant aux limites aux deux extrémités, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = H(+\infty) - H(-\infty) = 1.$$

La fonction h est continue, finie en tout réel, positive et d'intégrale 1 : c'est une densité. Soit U une variable aléatoire ayant cette densité ; sa fonction de répartition est H . La convergence $F_{U_n}(x) \rightarrow H(x)$ a été établie pour tout réel x , donc en particulier en chaque point de continuité de H . Par définition de la convergence en loi,

$$U_n \xrightarrow{\mathcal{L}} U, \quad F_U(x) = \exp(-e^{-x}), \quad f_U(x) = e^{-x} \exp(-e^{-x}) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Relevé des adaptations

Exercice 2, préambule de la partie II : caractère ouvert du domaine $]0, +\infty[^2$ précisé, conformément au cadrage officiel des fonctions de deux variables.

Exercice 2, question 12 : Code adapté en Python, avec documentation de `np.log` et de `print`. L'objectif, la précision et le comportement mathématique de la recherche du rang sont conservés.