



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**EM Lyon**

Mathématiques 1 — Option économique

**2015**

*Mathématiques appliquées*

---

**Mathématiques appliquées — Prépa ECG**

Annales de concours · Sujet

## Exercice 1

---

Dans tout l'exercice,  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées sont supposées définies sur cet espace.

### Partie I : Loi exponentielle

---

Dans toute cette partie,  $\lambda$  désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .
2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx, \quad \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

3. a. Soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[0; 1[$ . Quelle est la loi de la variable aléatoire  $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ ?
3. b. Écrire une fonction en Python qui, étant donné un réel  $\lambda$  strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . On pourra utiliser les commandes suivantes : après les imports `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`, `rd.random()` renvoie une simulation de la loi uniforme sur  $[0; 1[$  et `np.log(x)` renvoie le logarithme népérien d'un réel strictement positif  $x$ .

On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on définit la variable aléatoire  $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  qui, à tout  $\omega$  de  $\Omega$ , associe le plus grand des réels  $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$  et on note  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Pour  $n = 1$ , on interprète le facteur de puissance nulle comme égal à 1, y compris en  $x = 0$ .

## Partie II : Loi de la variable aléatoire $T_n$

---

4. a. Calculer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}_+^*$ , la probabilité  $P(T_n \leq x)$ .
4. b. En déduire que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $T_n$  est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction  $f_n$ .
5. a. Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $T_n$  admet une espérance.
5. b. Déterminer l'espérance  $E(T_1)$  de  $T_1$  et l'espérance  $E(T_2)$  de  $T_2$ .
6. a. Vérifier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x).$$

6. b. Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x) dx.$$

6. c. En déduire, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , une relation entre  $E(T_{n+1})$  et  $E(T_n)$ , puis une expression de  $E(T_n)$  sous forme d'une somme.

## Partie III : Loi du premier dépassement

Dans toute cette partie,  $a$  désigne un réel strictement positif.

On définit la variable aléatoire  $N$  égale au plus petit entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  tel que  $X_n > a$  si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements :  $(N = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leq a)$ . En déduire la probabilité  $P(N = 0)$ .

8. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N = n) = (1 - e^{-a})^{n-1} e^{-a}$ .

9. Déterminer l'espérance  $E(N)$  et la variance  $V(N)$  de  $N$ .

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire  $Z$ , définie pour tout  $\omega$  de  $\Omega$  par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0, \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0. \end{cases}$$

10. Justifier :  $P(Z \leq a) = 0$ .

11. Soit  $x \in ]a; +\infty[$ .

11. a. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Justifier l'égalité d'événements :

$$((N = n) \cap (Z \leq x)) = \begin{cases} (a < X_1 \leq x) & \text{si } n = 1, \\ (T_{n-1} \leq a) \cap (a < X_n \leq x) & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

En déduire la probabilité  $P((N = n) \cap (Z \leq x))$ .

11. b. Montrer :  $P(Z \leq x) = 1 - e^{-x}$ .
12. a. Montrer que la variable aléatoire  $Z - a$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
12. b. En déduire l'existence et la valeur de  $E(Z)$ , ainsi que l'existence et la valeur de  $V(Z)$ .

## Exercice 2

---

Dans cet exercice, on pourra utiliser l'encadrement suivant :  $2 < e < 3$ .

### Partie I : Étude d'une fonction

---

On considère l'application  $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \varphi(x) = x^2 e^x - 1$ .

1. Dresser le tableau de variations de  $\varphi$ , en précisant la limite de  $\varphi$  en  $-\infty$ , sa valeur en 0 et sa limite en  $+\infty$ .
2. Établir que l'équation  $e^x = \frac{1}{x^2}$ , d'inconnue  $x \in ]0; +\infty[$ , admet une solution et une seule, notée  $\alpha$ , et que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $] \frac{1}{2}; 1[$ .

On considère l'application  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3 e^x$ , et la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .

### Partie II : Étude d'une suite

---

3. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ .
4. Établir que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

5. Quelle est la limite de  $u_n$  lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini ?

### Partie III : Étude d'une série

---

6. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$$

converge. On note

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}.$$

7. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}.$$

8. En déduire une fonction en Python qui calcule une valeur approchée de  $S$  à  $10^{-4}$  près. Après `import numpy as np`, on pourra utiliser `np.exp(x)` pour calculer  $e^x$  et `np.e` pour la constante  $e$ .

### Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

---

On considère l'ouvert  $U = ]0; +\infty[ \times \mathbb{R}$  de  $\mathbb{R}^2$  et l'application de classe  $\mathcal{C}^2$  suivante :

$$g : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y.$$

9. Représenter graphiquement l'ensemble  $U$ .
10. Calculer, pour tout  $(x, y)$  de  $U$ , les dérivées partielles premières de  $g$  en  $(x, y)$ .
11. Montrer que  $g$  admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont  $(\alpha, 0)$  et  $(\alpha, -2)$ , où  $\alpha$  est le réel défini à la question 2.
12. Est-ce que  $g$  admet un extremum local en  $(\alpha, 0)$ ? Calculer la hessienne et étudier les signes de ses valeurs propres pour justifier la réponse.
13. Est-ce que  $g$  admet un extremum local en  $(\alpha, -2)$ ? Calculer la hessienne et étudier les signes de ses valeurs propres pour justifier la réponse.
14. Est-ce que  $g$  admet un extremum global sur  $U$ ?

### Exercice 3

---

Soit  $E = \mathbb{R}^3$ . On note  $0_E$  le vecteur nul de  $E$ .

On note  $i$  l'application identité de  $E$ , et  $\theta$  l'application constante nulle de  $E$  dans  $E$  :

$i : E \longrightarrow E, x \longmapsto x$  et  $\theta : E \longrightarrow E, x \longmapsto 0_E$ .

On considère un endomorphisme  $f$  de  $E$  tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta, \quad f \circ (f^2 + i) = \theta,$$

où  $f^2$  désigne  $f \circ f$ . On note  $F$  la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  sont identifiés à leurs colonnes de coordonnées dans cette base ; ainsi  $f(x) = Fx$ ,  $F \neq 0$ ,  $F^2 + I_3 \neq 0$  et  $F(F^2 + I_3) = 0$ .

1. a. Montrer que  $f$  n'est pas bijectif.

1. b. En déduire que 0 est valeur propre de  $F$ , puis montrer qu'il existe  $u$  appartenant à  $E$  tel que  $u \neq 0_E$  et  $f(u) = 0_E$ .

Soit  $v_1$  appartenant à  $E$  tel que  $v_1 \neq 0_E$  et  $f(v_1) = 0_E$ .

2. Montrer :  $\text{Sp}(F) = \{0\}$ , où  $\text{Sp}(F)$  désigne l'ensemble des valeurs propres réelles de  $F$ .

3. Est-ce que  $F$  est diagonalisable ?

4. Montrer que  $f^2 + i$  n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe  $v$  appartenant à  $E$  tel que  $v \neq 0_E$  et  $f^2(v) = -v$ .

Soit  $v_2$  appartenant à  $E$  tel que  $v_2 \neq 0_E$  et  $f^2(v_2) = -v_2$ . On note  $v_3 = f(v_2)$ .

5. Montrer :  $f(v_3) = -v_2$ .

6. a. Montrer que la famille  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $E$ .

6. b. Déterminer la matrice  $C$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et le sous-espace vectoriel  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  engendré par  $(A, B, C)$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{aA + bB + cC; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

7. Déterminer la dimension de  $\mathcal{F}$ .
8. Montrer :  $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); CM = MC\} = \mathcal{F}$ .
9. a. Pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , calculer la matrice  $(aA + bB + cC)^2$ .
9. b. En déduire une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. On note  $g = f^2 - i$ . Montrer que  $g$  est bijectif et exprimer  $g^{-1}$  à l'aide de  $f$  et  $i$ .