



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2015

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie I : Loi exponentielle

1. Si X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, une densité et sa fonction de répartition sont :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Les moments de cette loi existent et les résultats de cours donnent $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. La valeur d'une densité au seul point 0 n'influe pas sur la loi.

2. On calcule d'abord sur un segment $[0, R]$, avec $R > 0$:

$$\int_0^R e^{-\lambda x} dx = \frac{1 - e^{-\lambda R}}{\lambda}.$$

Comme $\lambda > 0$, $e^{-\lambda R} \rightarrow 0$ et la première intégrale converge vers $\frac{1}{\lambda}$.

Pour la seconde, l'intégration par parties sur $[0, R]$, avec $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-\lambda x}$, donne :

$$\int_0^R x e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^R + \frac{1}{\lambda} \int_0^R e^{-\lambda x} dx = -\frac{R}{\lambda} e^{-\lambda R} + \frac{1 - e^{-\lambda R}}{\lambda^2}.$$

Les croissances comparées donnent $R e^{-\lambda R} \rightarrow 0$. L'intégrale converge donc et vaut $\frac{1}{\lambda^2}$.

3. a. Puisque $0 \leq U < 1$, $1 - U$ est strictement positif et V est bien définie, avec $V \geq 0$.
Pour $x < 0$, $P(V \leq x) = 0$. Pour $x \geq 0$, les transformations suivantes conservent ou inversent les inégalités comme indiqué :

$$V \leq x \iff \ln(1 - U) \geq -\lambda x \iff 1 - U \geq e^{-\lambda x} \iff U \leq 1 - e^{-\lambda x}.$$

Le réel $1 - e^{-\lambda x}$ appartient à $[0, 1[$. La fonction de répartition de U donne alors $P(V \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$. On reconnaît exactement la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ : $V \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

3. b. Code adapté en Python. La formule précédente permet de simuler la loi à partir d'un seul tirage uniforme :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def exponentielle(lam):
    u = rd.random()
    return -np.log(1 - u) / lam
```

Le paramètre d'entrée est supposé strictement positif. `rd.random()` produit un réel de $[0, 1[$; $1 - u$ est donc strictement positif. Le nombre renvoyé a la loi voulue selon la question 3.a. Le code a été exécuté pour plusieurs paramètres strictement positifs; les valeurs renvoyées sont non négatives. L'exécution d'une simulation illustre le fonctionnement, tandis que la preuve de la loi est celle de 3.a.

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. a. Le maximum est inférieur ou égal à x si et seulement si chacune des n variables l'est :

$$\{T_n \leq x\} = \bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq x\}.$$

Les variables $X_1, \dots, X_n$ étant indépendantes, les événements intervenant dans cette

intersection sont indépendants. Pour $x > 0$, on obtient :

$$P(T_n \leq x) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x) = (1 - e^{-x})^n.$$

4. b. Chaque X_k étant presque sûrement positive, $F_{T_n}(x) = 0$ pour $x < 0$, et $F_{T_n}(0) = 0$. Ainsi :

$$F_{T_n}(x) = \begin{cases} (1 - e^{-x})^n & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, notamment en 0, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La variable T_n est donc à densité. Pour $x > 0$, la dérivation donne

$F'_{T_n}(x) = ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} = f_n(x)$; pour $x < 0$, la dérivée est nulle. La valeur prescrite en 0 est autorisée pour une densité. Celle-ci est positive et ses limites à gauche et à droite en chaque point sont finies. La fonction f_n de l'énoncé est donc une densité de T_n .

5. a. Méthode 1 — Majoration de l'intégrande

Pour $x \geq 0$, $0 \leq 1 - e^{-x} \leq 1$, donc $0 \leq xf_n(x) \leq nxe^{-x}$. La question 2 avec $\lambda = 1$ montre que $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ converge. Par comparaison d'intégrales positives, $\int_0^{+\infty} xf_n(x) dx$ converge. C'est également l'intégrale de $|x|f_n(x)$ puisque la densité est nulle pour $x < 0$. L'espérance de T_n existe.

Méthode 2 — Encadrement des variables

Presque sûrement, les X_k sont positives et $0 \leq T_n \leq X_1 + \dots + X_n$. La somme de droite admet une espérance égale à n puisque chaque X_k a pour espérance 1. La domination d'une variable positive par une variable intégrable montre donc que T_n est intégrable et $0 \leq E(T_n) \leq n$.

La première méthode exploite la densité explicitement ; la seconde peut être utilisée même sans calculer la loi du maximum.

5. b. La variable $T_1 = X_1$ suit $\mathcal{E}(1)$, donc $E(T_1) = 1$.

Méthode 1 — Densité du maximum

On dispose de $f_2(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$ pour $x \geq 0$. Les deux intégrales de moments convergent par la question 2, ce qui autorise la linéarité :

$$E(T_2) = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx - 2 \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2}.$$

Méthode 2 — Identité entre minimum et maximum

Posons $Y = \min(X_1, X_2)$. Pour $x \geq 0$, l'indépendance donne

$P(Y > x) = P(X_1 > x)P(X_2 > x) = e^{-2x}$. Pour $x < 0$, $F_Y(x) = 0$; ainsi $Y \sim \mathcal{E}(2)$ et $E(Y) = \frac{1}{2}$. L'identité réelle $\max(s, t) + \min(s, t) = s + t$ donne $T_2 + Y = X_1 + X_2$. Tous

ces termes sont intégrables, donc $E(T_2) = 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Cette seconde méthode utilise la complémentarité du minimum et du maximum et évite l'intégration de la densité de T_2 .

6. a. Fixons $n \geq 1$ et $x > 0$. La factorisation de la différence donne :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= e^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}((n+1)(1 - e^{-x}) - n) \\ &= e^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}(1 - (n+1)e^{-x}). \end{aligned}$$

D'autre part, la dérivation du produit définissant f_{n+1} conduit à :

$$f'_{n+1}(x) = (n+1) [-e^{-x}(1-e^{-x})^n + ne^{-2x}(1-e^{-x})^{n-1}].$$

En mettant en facteur, on obtient :

$$f'_{n+1}(x) = (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}((n+1)e^{-x} - 1).$$

Les deux expressions donnent bien $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1}f'_{n+1}(x)$.

6. b. On effectue l'intégration par parties sur un segment $[0, R]$. Les expressions de droite des densités et de leurs dérivées se prolongent continûment en 0 pour les indices considérés. En utilisant 6.a, puis en intégrant $xf'_{n+1}(x)$, on a :

$$\int_0^R x(f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = -\frac{1}{n+1} \left[Rf_{n+1}(R) - \int_0^R f_{n+1}(x) dx \right].$$

Le terme en 0 est nul puisqu'il contient un facteur x . De plus,

$0 \leq Rf_{n+1}(R) \leq (n+1)Re^{-R} \rightarrow 0$. Les deux intégrales de moments du membre de gauche convergent par 5.a. Celle de droite converge et vaut 1 à la limite puisque f_{n+1} est une densité nulle sur $] -\infty, 0[$. Le passage à la limite donne donc :

$$\int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x) dx = \frac{1}{n+1}.$$

6. c. Par linéarité des intégrales convergentes, le membre de gauche de 6.b est $E(T_{n+1}) - E(T_n)$. Par conséquent :

$$\forall n \geq 1, \quad E(T_{n+1}) = E(T_n) + \frac{1}{n+1}.$$

En sommant ces égalités pour les indices de 1 à $n - 1$, les espérances intermédiaires se simplifient et

$$E(T_n) - E(T_1) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}.$$

Avec $E(T_1) = 1$, on conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Cette formule vaut également pour $n = 1$, sans utiliser la somme intermédiaire vide.

Partie III : Loi du premier dépassement

7. Par définition, $N = 0$ signifie qu'aucun entier strictement positif ne correspond à un dépassement de a . Cela équivaut à $X_k \leq a$ pour tout $k \geq 1$, ce qui établit l'égalité d'événements demandée.

Posons $q = 1 - e^{-a}$. Comme $a > 0$, $0 < q < 1$. Pour chaque entier $m \geq 1$, l'événement $\{N = 0\}$ est inclus dans $\bigcap_{k=1}^m \{X_k \leq a\}$. L'indépendance donne donc :

$$0 \leq P(N = 0) \leq \prod_{k=1}^m P(X_k \leq a) = q^m.$$

Comme $q^m \rightarrow 0$, l'encadrement impose $P(N = 0) = 0$. Cette démonstration n'exige pas de multiplier une infinité de probabilités.

8. Pour $n \geq 1$, le premier dépassement se produit à l'instant n si les $n - 1$ premiers essais n'ont pas dépassé a et si le n -ième le dépasse :

$$\{N = n\} = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \{X_k \leq a\} \right) \cap \{X_n > a\}.$$

Lorsque $n = 1$, il s'agit simplement de $\{X_1 > a\}$. L'indépendance donne dans tous les cas :

$$P(N = n) = q^{n-1}e^{-a} = (1 - e^{-a})^{n-1}e^{-a}.$$

9. Avec $p = e^{-a} \in]0, 1[$, les questions 7 et 8 montrent que N suit la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$; la valeur supplémentaire 0 a une probabilité nulle. Les moments de cette loi existent et :

$$E(N) = \frac{1}{p} = e^a, \quad \mathbb{V}(N) = \frac{1-p}{p^2} = e^{2a} - e^a.$$

10. Si $N \geq 1$, la définition du premier dépassement assure $Z = X_N > a$. Si $N = 0$, alors $Z = 0 \leq a$, car $a > 0$. Les événements $\{Z \leq a\}$ et $\{N = 0\}$ sont donc égaux. Par 7, $P(Z \leq a) = 0$.

11. Dans toute cette question, on fixe un réel $x > a$.

11. a. Pour $n = 1$, $N = 1$ équivaut à $X_1 > a$ et, sur cet événement, $Z = X_1$. On a donc $\{N = 1, Z \leq x\} = \{a < X_1 \leq x\}$.

Pour $n \geq 2$, $N = n$ signifie $X_1 \leq a, \dots, X_{n-1} \leq a, X_n > a$ et, sur cet événement, $Z = X_n$. La condition portant sur les $n - 1$ premières variables équivaut à $T_{n-1} \leq a$. Cela prouve l'égalité demandée.

Comme $x > a$, $P(a < X_n \leq x) = F_{X_n}(x) - F_{X_n}(a) = e^{-a} - e^{-x}$. L'événement $\{T_{n-1} \leq a\}$ dépend seulement de $X_1, \dots, X_{n-1}$, indépendantes de X_n . Ainsi, pour $n \geq 2$, la probabilité de l'intersection vaut $q^{n-1}(e^{-a} - e^{-x})$. Cette expression vaut aussi pour $n = 1$. Finalement :

$$\forall n \geq 1, \quad P((N = n) \cap (Z \leq x)) = q^{n-1}(e^{-a} - e^{-x}).$$

11. b. Les événements $\{N = n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$, forment un système complet. Le terme correspondant à $n = 0$ a une probabilité nulle. Par la formule des probabilités totales et la somme d'une série géométrique de raison $q \in]0, 1[$:

$$P(Z \leq x) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}(e^{-a} - e^{-x}) = \frac{e^{-a} - e^{-x}}{1 - q} = \frac{e^{-a} - e^{-x}}{e^{-a}} = 1 - e^{a-x}.$$

12. a. Pour $t < 0$, l'événement $\{Z - a \leq t\}$ est inclus dans $\{Z \leq a\}$, dont la probabilité est nulle. Pour $t = 0$, cette probabilité est encore nulle. Pour $t > 0$, la question 11.b avec $x = a + t$ donne $P(Z - a \leq t) = 1 - e^{-t}$. Ainsi :

$$F_{Z-a}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - e^{-t} & t \geq 0. \end{cases}$$

On reconnaît $Z - a \sim \mathcal{E}(1)$.

12. b. Écrivons $Y = Z - a$. La variable Y possède une espérance 1 et une variance 1. Par transformation affine, $Z = Y + a$ possède elle aussi une espérance et une variance, et :

$$E(Z) = a + 1, \quad \mathbb{V}(Z) = 1.$$

Exercice 2

Partie I : Étude d'une fonction

1. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = 2xe^x + x^2e^x = x(x+2)e^x$. Puisque $e^x > 0$, la dérivée est positive pour $x < -2$ et $x > 0$, négative pour $-2 < x < 0$, et nulle en -2 et 0 .

Par croissances comparées, $x^2e^x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow -\infty$, donc $\varphi(x) \rightarrow -1$. On a $\varphi(-2) = 4e^{-2} - 1$, $\varphi(0) = -1$ et $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
Signe de φ'	+	0, puis -	0, puis +	
Valeurs et variations	$-1 \nearrow$	$4e^{-2} - 1 \searrow$	$-1 \nearrow$	$+\infty$

2. Pour $x > 0$, l'équation donnée équivaut à $x^2e^x - 1 = 0$, donc à $\varphi(x) = 0$. Sur $]0, +\infty[$, la fonction φ est continue et strictement croissante; sa limite en 0 est -1 et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance assurent l'existence et l'unicité de α .

Comme $\sqrt{e} < \sqrt{3} < 2$, $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\sqrt{e} - 1 < 0$. En outre, $\varphi(1) = e - 1 > 0$. La stricte croissance entraîne $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Partie II : Étude d'une suite

3. Le résultat s'établit par récurrence. Initialement, $u_0 = 1$. Si $u_n \geq 1$, alors $u_n^3 \geq 1$ et $e^{u_n} \geq e > 1$, d'où $u_{n+1} = u_n^3 e^{u_n} \geq e > 1$. La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Comme $u_n \geq 1 > 0$, on peut diviser par u_n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n^2 e^{u_n} \geq e > 1.$$

On a donc $u_{n+1} > u_n$ pour tout n : la suite est même strictement croissante.

5. Méthode 1 — Limite éventuelle et point fixe

Une suite croissante admet une limite finie ou tend vers $+\infty$. Supposons que (u_n) ait une limite finie ℓ . Comme $u_n \geq 1$, $\ell \geq 1$. La continuité de f permet de passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$: $\ell = \ell^3 e^\ell$. Puisque $\ell > 0$, cela entraîne $\ell^2 e^\ell = 1$, c'est-à-dire $\varphi(\ell) = 0$. Par 2, $\ell = \alpha < 1$, en contradiction avec $\ell \geq 1$. La limite ne peut donc être finie et $u_n \rightarrow +\infty$.

Méthode 2 — Minoration géométrique

Le calcul de 4 donne $u_{n+1} \geq e u_n$. Par récurrence à partir de $u_0 = 1$, on obtient $u_n \geq e^n$ pour tout n . Comme $e > 1$, $e^n \rightarrow +\infty$, donc $u_n \rightarrow +\infty$.

La première méthode utilise la fonction et son unique point fixe positif ; la seconde fournit en plus une vitesse minimale de croissance.

Partie III : Étude d'une série

6. Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{f(n)} = \frac{e^{-n}}{n^3} > 0$. Posons

$$S_m = \sum_{k=1}^m \frac{e^{-k}}{k^3}.$$

La suite (S_m) est croissante, et pour tout entier $m \geq 1$:

$$0 \leq S_m \leq \sum_{k=1}^m e^{-k} = \frac{1 - e^{-m}}{e - 1} \leq \frac{1}{e - 1}.$$

Elle est donc croissante et majorée, ce qui prouve sa convergence. Par définition, la série converge et sa somme est S . Cette preuve s'appuie uniquement sur des sommes géométriques finies et le théorème de convergence des suites monotones.

7. Les termes étant positifs, $S - S_n \geq 0$. Pour tout entier $m > n$:

$$0 \leq S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^m \frac{e^{-k}}{k^3} \leq \sum_{k=n+1}^m e^{-k} \leq \frac{e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{(e - 1)e^n}.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient $0 \leq S - S_n \leq \frac{1}{(e - 1)e^n}$. Cela établit l'inégalité avec la valeur absolue demandée.

8. Code adapté en Python. On additionne les termes jusqu'à ce que la majoration du reste soit inférieure ou égale à 10^{-4} :

Python

```
import numpy as np

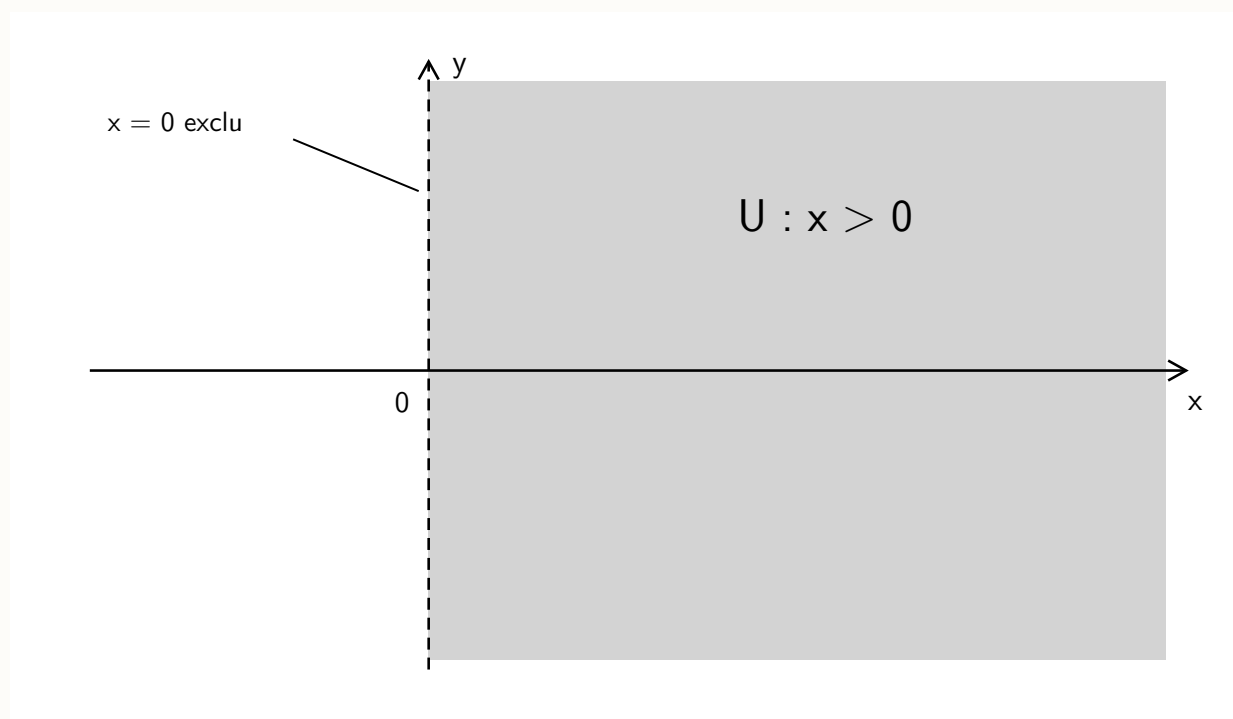
def somme_approchee():
    n = 0
    s = 0.0
    while 1 / ((np.e - 1) * np.exp(n)) > 1e-4:
        n = n + 1
        s = s + np.exp(-n) / n**3
    return s
```

Après chaque passage dans la boucle, s est la somme S_n . La première mise à jour donne $n = 1$ avant toute division par n^3 . La boucle se termine puisque la borne du reste tend vers 0. À la sortie, l'inégalité de 7 garantit $|S - s| \leq 10^{-4}$, à l'arrondi numérique usuel près.

Le code a été exécuté : la boucle s'arrête à $n = 9$, renvoie environ 0,3869953612 et utilise la borne du reste $\frac{1}{(e-1)e^9} \simeq 7,182 \times 10^{-5}$. Le résultat mathématique exact concerne la somme partielle S_9 ; le nombre renvoyé en est le calcul numérique.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

9. L'ensemble U est le demi-plan ouvert situé strictement à droite de l'axe des ordonnées. La droite $x = 0$ en est exclue. La zone grisée ci-dessous se prolonge sans limite vers la droite, vers le haut et vers le bas.



10. Les dérivations partielles donnent, pour tout $(x, y) \in U$:

$$\partial_1 g(x, y) = -\frac{1}{x^2} + e^x, \quad \partial_2 g(x, y) = -2ye^y - y^2e^y = -y(y+2)e^y.$$

11. Un point critique vérifie simultanément $e^x = \frac{1}{x^2}$ et $y(y+2)e^y = 0$. La première équation, avec $x > 0$, a pour unique solution $x = \alpha$ par 2. Comme $e^y > 0$, la seconde a exactement les solutions $y = 0$ et $y = -2$. Les deux points appartiennent à U et annulent les deux dérivées. Les seuls points critiques sont donc $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$.

- 12.** Question adaptée au programme actuel : la nature du point critique est déterminée par la hessienne et les signes de ses valeurs propres.

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U : ses termes sont des fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^2$, et x n'y est jamais nul. Ses dérivées secondes sont :

$$\begin{aligned}\partial_{1,1}^2 g(x, y) &= \frac{2}{x^3} + e^x, & \partial_{1,2}^2 g(x, y) &= \partial_{2,1}^2 g(x, y) = 0, & \partial_{2,2}^2 g(x, y) \\ &= -(y^2 + 4y + 2)e^y.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\nabla^2 g(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice diagonale a pour valeurs propres $\frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha > 0$ et $-2 < 0$. Elles sont non nulles et de signes opposés. Le critère hessien montre que $(\alpha, 0)$ est un point selle, et que g n'y admet aucun extremum local.

- 13.** Question adaptée au programme actuel : on emploie à nouveau la hessienne, sans déterminant.

Avec les dérivées de 12, on obtient :

$$\nabla^2 g(\alpha, -2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Ses deux valeurs propres sont strictement positives. Le point $(\alpha, -2)$ est critique par 11 et g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U ; toutes les hypothèses du critère sont vérifiées. La fonction admet donc en ce point un minimum local strict, de valeur $g(\alpha, -2) = \frac{1}{\alpha} + e^\alpha - 4e^{-2}$.

14. En fixant $y = 0$ et en faisant tendre x vers $+\infty$, on a $g(x, 0) = \frac{1}{x} + e^x \rightarrow +\infty$. La fonction n'est donc pas majorée sur U et ne possède aucun maximum global.

En fixant $x = \alpha$ et en faisant tendre y vers $+\infty$, on a $g(\alpha, y) = \frac{1}{\alpha} + e^\alpha - y^2 e^y \rightarrow -\infty$. La fonction n'est donc pas minorée sur U et ne possède aucun minimum global. En particulier, le minimum local de 13 n'est pas global. La fonction g n'admet aucun extremum global sur U .

Exercice 3

Question adaptée au programme actuel : le cadre initial est concrétisé par $E = \mathbb{R}^3$. On utilise la matrice F de f dans sa base canonique ; la relation fondamentale est $F^3 + F = 0$, avec $F \neq 0$ et $F^2 + I_3 \neq 0$.

1. a. Si f était bijectif, F serait inversible. En multipliant $F(F^2 + I_3) = 0$ à gauche par F^{-1} , on obtiendrait $F^2 + I_3 = 0$, ce qui contredit une hypothèse. Donc f n'est pas bijectif.
1. b. Une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même est bijective si et seulement si elle est injective. La non-bijectivité de f entraîne donc l'existence d'un vecteur $u \neq 0_E$ dans son noyau. Comme $Fu = f(u) = 0 = 0u$, u est un vecteur propre de F pour la valeur propre 0. Ainsi $0 \in \text{Sp}(F)$ et le vecteur u demandé existe.
2. Question adaptée au programme actuel : on étudie les valeurs propres réelles de la matrice F .

Soit μ une valeur propre réelle de F et $v \neq 0$ un vecteur propre associé. On a $Fv = \mu v$, donc $F^3v = \mu^3v$. La relation $F^3 + F = 0$ donne $(\mu^3 + \mu)v = 0$. Comme $v \neq 0$, $\mu(\mu^2 + 1) = 0$. Pour un réel μ , $\mu^2 + 1 > 0$, donc $\mu = 0$. Cela prouve $\text{Sp}(F) \subset \{0\}$; l'inclusion réciproque est établie à la question 1.b. Par conséquent, $\text{Sp}(F) = \{0\}$.

3. Question adaptée au programme actuel : la diagonalisation porte sur F .

Supposons F diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Il existerait une matrice inversible P telle que $P^{-1}FP = D$, avec D diagonale. Les coefficients diagonaux de D seraient des valeurs

propres de F et donc tous nuls par 2. Ainsi $D = 0$, puis $F = PDP^{-1} = 0$, ce qui contredit $F \neq 0$. Donc F n'est pas diagonalisable.

4. Si $f^2 + i$ était bijectif, la matrice $F^2 + I_3$ serait inversible. La multiplication de $F(F^2 + I_3) = 0$ à droite par son inverse donnerait $F = 0$, contradiction. Donc $f^2 + i$ n'est pas bijectif.

Comme il s'agit d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, elle n'est pas injective. Il existe donc $v \neq 0_E$ tel que $(f^2 + i)(v) = 0_E$, c'est-à-dire $f^2(v) = -v$.

5. La définition $v_3 = f(v_2)$ donne $f(v_3) = f(f(v_2)) = f^2(v_2) = -v_2$. En particulier, $f(v_3) \neq 0_E$ et donc $v_3 \neq 0_E$.
6. a. Pour prouver la liberté, supposons $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_E$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On connaît $Fv_1 = 0$, $Fv_2 = v_3$ et $Fv_3 = -v_2$, donc $F^2v_1 = 0$, $F^2v_2 = -v_2$ et $F^2v_3 = -v_3$. En appliquant F^2 à la relation initiale, on obtient $-bv_2 - cv_3 = 0_E$. L'addition à la relation initiale donne $av_1 = 0_E$. Comme $v_1 \neq 0_E$, $a = 0$.

Il reste $bv_2 + cv_3 = 0_E$. L'application de F à cette relation donne $bv_3 - cv_2 = 0_E$. En multipliant la première relation par b , la seconde par c puis en les soustrayant, on obtient $(b^2 + c^2)v_2 = 0_E$. Puisque $v_2 \neq 0_E$, $b^2 + c^2 = 0$; comme b, c sont réels, $b = c = 0$.

La famille (v_1, v_2, v_3) est donc libre. Elle comporte trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, donc c'est une base de E .

6. b. Les colonnes de la matrice sont les coordonnées des images des vecteurs de base : $f(v_1) = 0_E$, $f(v_2) = v_3$ et $f(v_3) = -v_2$. Ainsi :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Pour tous réels a, b, c , la combinaison linéaire s'écrit :

$$aA + bB + cC = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}.$$

Si cette matrice est nulle, ses coefficients en positions $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(3, 2)$ donnent successivement $a = 0$, $b = 0$ et $c = 0$. La famille (A, B, C) est donc libre. Comme elle engendre $\mathcal{F}$ par définition, c'est une base de $\mathcal{F}$ et $\dim \mathcal{F} = 3$.

8. Écrivons une matrice quelconque sous la forme $M = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & z \end{pmatrix}$. Le produit avec la

matrice C donne :

$$CM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -v & -w & -z \\ s & t & u \end{pmatrix}, \quad MC = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ 0 & u & -t \\ 0 & z & -w \end{pmatrix}.$$

L'égalité $CM = MC$ équivaut, coefficient par coefficient, aux conditions $q = r = s = v = 0$, $u = -w$ et $z = t$. Les autres égalités sont alors automatiquement satisfaites. Par conséquent :

$$CM = MC \iff M = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & t & -w \\ 0 & w & t \end{pmatrix} = pA + tB + wC.$$

Le membre de droite signifie exactement $M \in \mathcal{F}$. Les deux ensembles sont donc égaux.

9. a. En utilisant la forme matricielle de 7 et en multipliant lignes et colonnes :

$$(aA + bB + cC)^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - c^2 & -2bc \\ 0 & 2bc & b^2 - c^2 \end{pmatrix}.$$

On peut également écrire le résultat $a^2A + (b^2 - c^2)B + 2bcC$.

9. b. Il suffit de choisir des réels tels que $a^2 = 4$, $b^2 - c^2 = 5$ et $bc = 6$. Le choix $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$ convient, puisque $9 - 4 = 5$ et $3 \times 2 = 6$. Ainsi :

$$M = 2A + 3B + 2C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La formule de 9.a donne exactement $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$, ce qui établit l'existence

demandée.

10. Méthode 1 — Identité matricielle explicite

De $F^3 + F = 0$, on déduit par multiplication par F que $F^4 + F^2 = 0$. La matrice de $g = f^2 - i$ dans la base canonique est $G = F^2 - I_3$. On vérifie directement :

$$(F^2 - I_3) \left(-I_3 - \frac{1}{2}F^2 \right) = I_3 - \frac{1}{2}F^2 - \frac{1}{2}F^4 = I_3.$$

Le produit dans l'autre sens est identique, car les deux matrices sont des polynômes en F , donc commutent. La matrice G est ainsi inversible, d'inverse $-I_3 - \frac{1}{2}F^2$.

L'application g est bijective et :

$$g^{-1} = -i - \frac{1}{2}f^2.$$

Méthode 2 — Calcul dans la base construite

Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de f est C et $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de g dans cette

base est donc :

$$C^2 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. Son

inverse est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -I_3 - \frac{1}{2}C^2.$$

Cette dernière matrice représente l'application $-i - \frac{1}{2}f^2$ dans la même base, donc $g^{-1} = -i - \frac{1}{2}f^2$.

La première méthode utilise seulement la relation satisfaite par F ; la seconde montre comment la base construite rend l'inversion immédiate.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 3.b : Code adapté en Python. La demande initiale de simulation est conservée ; la syntaxe et le rôle des commandes nécessaires sont documentés dans le sujet.

Exercice 1, définition de f_n utilisée aux questions 4 à 6 : le cas $n = 1, x = 0$ est explicité pour éviter l'ambiguïté du facteur de puissance nulle. Cette convention de densité en un point ne modifie aucune loi ni aucun résultat.

Exercice 2, question 8 : Code adapté en Python. La borne du reste et la précision demandée sont conservées ; les commandes numériques utilisées sont documentées.

Exercice 2, questions 12 et 13 : la demande de classification des extrema est accompagnée du calcul de la hessienne et de l'étude des signes de ses valeurs propres, conformément à la méthode actuelle imposée.

Exercice 3, préambule et questions 1 à 6 et 10 : le cadre d'un espace vectoriel abstrait de dimension trois est remplacé par l'espace concret $\mathbb{R}^3$, avec introduction de la matrice F de f dans la base canonique. Les conditions sur f , les constructions de vecteurs et tous les objectifs sont conservés. Aux questions 1.b, 2 et 3, les notions de valeur propre, spectre réel et diagonalisation sont formulées pour F . Aucun résultat de réduction

supplémentaire n'est utilisé.