



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2014

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

On considère l'application $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{1/x}$. On admet : $2 < e < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe C^3 sur $]0; +\infty[$, calculer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$, et montrer :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{1/x}.$$

2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$. En déduire le sens de variation de φ' , et montrer :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \varphi'(x) \geq e.$$

3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

4. Déterminer la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3; +\infty[, \quad \varphi(x) \geq ex$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ .

6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et une équation de la tangente en ce point.
7. Dresser le tableau de variations de φ , avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion. On précisera la nature de la branche infinie au voisinage de 0 et la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

Partie II : Étude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R} \times]0; +\infty[$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et on considère l'application

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto xy - e^x \ln y.$$

8. Représenter graphiquement l'ensemble U .
9. Montrer que f est de classe C^2 sur l'ouvert U et calculer, pour tout (x, y) de U , les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x, y) .
10. Établir que, pour tout (x, y) de U , (x, y) est un point critique de f si et seulement si :
 $x > 0$ et $y = e^{1/x}$ et $\varphi(x) = 0$.
11. En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1, e)$.
12. Est-ce que f admet un extremum local en $(1, e)$? On calculera la matrice hessienne en ce point et on étudiera les signes de ses valeurs propres, sans calcul de déterminant.
13. Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

Partie III : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

14. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 3e^n$. On pourra utiliser les résultats de la partie I.
15. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

16. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^3$. On pourra utiliser $\exp(x)$ après l'instruction `from math import exp` : cette fonction renvoie l'exponentielle du réel x .
17. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$?

EXERCICE 2

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?
2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est-à-dire :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, \quad MN \in \mathcal{E}.$$

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

6. Est-ce que T est diagonalisable ?

On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.

7. Calculer $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F .

8. Montrer que f admet une valeur propre et une seule, et déterminer celle-ci, puis déterminer une base et la dimension du sous-espace propre de f associé à cette valeur propre.

9. Est-ce que f est diagonalisable ?

10. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Calculer H^2 , puis, pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

12. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n .

13. Trouver une matrice G de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$. Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

EXERCICE 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue une succession de $(n + 1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable aléatoire X_n prend ses valeurs dans $\{2, \dots, n + 1\}$. Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 5, 3, alors $X_5 = 4$.

Pour tout k de $\{1, \dots, n + 1\}$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k -ième tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie uniquement que $n = 3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. a. Exprimer l'événement $(X_3 = 4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables aléatoires N_1, N_2, N_3 . En déduire $P(X_3 = 4)$.

b. Montrer que $P(X_3 = 2) = \frac{2}{3}$, et en déduire $P(X_3 = 3)$.
2. Calculer l'espérance de X_3 .

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $\{1, \dots, n + 1\}$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.
4. Calculer $P(X_n = n + 1)$.

5. Montrer, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$:

$$P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n-i+1}{n}.$$

6. En déduire une expression simple de $P(X_n = 2)$.

7. Soit $k \in \{2, \dots, n\}$. Justifier l'égalité d'événements suivante :

$$(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \dots > N_k).$$

En déduire : $P(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$. Pour le comptage, on pourra associer à chaque choix de k numéros distincts l'unique liste de ces numéros rangés dans l'ordre strictement décroissant.

Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

8. Exprimer, pour tout $k \in \{2, \dots, n+1\}$, $P(X_n = k)$ à l'aide de $P(X_n > k-1)$ et de $P(X_n > k)$.

9. En déduire :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^n P(X_n > k).$$

Calculer ensuite $E(X_n)$.

10. Montrer : $\forall k \in \{2, \dots, n+1\}, \quad P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}.$

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}.$$

12. Montrer que la série

$$\sum_{k \geq 2} \frac{k-1}{k!}$$

converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $\{2, 3, \dots\}$ telle que :

$$\forall k \geq 2, \quad P(Z = k) = \frac{k-1}{k!}.$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $E(Z)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$.