



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2014

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Les fonctions exponentielle et inverse sont de classe C^∞ sur leurs domaines, et $x > 0$.
Par composition, produit et différence, φ est donc de classe C^∞ , en particulier C^3 , sur $]0; +\infty[$.

Comme $(e^{1/x})' = -e^{1/x}/x^2$, la dérivation du produit donne

$$\varphi'(x) = e^x - e^{1/x} + \frac{e^{1/x}}{x} = e^x + \left(\frac{1}{x} - 1\right) e^{1/x}.$$

En dérivant les deux termes du produit dans la dernière expression, on obtient

$$\varphi''(x) = e^x - \frac{e^{1/x}}{x^3},$$

puis

$$\varphi'''(x) = e^x + \frac{3e^{1/x}}{x^4} + \frac{e^{1/x}}{x^5} = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{1/x}.$$

2. Pour $x > 0$, tous les termes de $\varphi'''(x)$ sont strictement positifs. Ainsi φ'' est strictement croissante, avec $\varphi''(1) = e - e = 0$. Elle est négative sur $]0; 1[$ et positive sur $]1; +\infty[$.

Par conséquent, φ' décroît strictement jusqu'à 1, puis croît strictement. Son minimum est $\varphi'(1) = e$. Ainsi $\varphi'(x) \geq e$ pour tout $x > 0$.

3. Posons $t = 1/x$. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $t \rightarrow +\infty$ et $xe^{1/x} = e^t/t \rightarrow +\infty$ par croissance comparée. Comme $e^x \rightarrow 1$, on a $\varphi(x) \rightarrow -\infty$.

4. On écrit

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{e^x}{x} - e^{1/x}.$$

Le premier terme tend vers $+\infty$ par croissance comparée et le second vers 1. Ainsi $\varphi(x)/x \rightarrow +\infty$. Comme $x \rightarrow +\infty$, on en déduit $\varphi(x) \rightarrow +\infty$.

5. Méthode 1 — Étude d'une différence

Posons $h(x) = \varphi(x) - ex$. On a $h'(x) = \varphi'(x) - e \geq 0$, donc h est croissante. Or $h(3) = \varphi(3) - 3e > 15 - 9 = 6$, puisque $e < 3$. Ainsi $h(x) > 0$ pour $x \geq 3$, d'où l'inégalité demandée.

Méthode 2 — Intégration d'une minoration

Pour $x \geq 3$, le théorème fondamental de l'intégration, applicable à la fonction C^1 qu'est φ , donne

$$\varphi(x) - \varphi(3) = \int_3^x \varphi'(t) dt \geq e(x - 3).$$

Donc $\varphi(x) \geq ex + \varphi(3) - 3e > ex$. La première méthode construit une fonction monotone; la seconde permet de réutiliser directement une borne sur la dérivée sous forme d'accroissement.

6. La fonction est de classe C^2 et sa dérivée seconde change de signe uniquement en 1. Elle est concave sur $]0; 1[$ et convexe sur $]1; +\infty[$. Son unique point d'inflexion est donc $A = (1, \varphi(1)) = (1, 0)$. La tangente en ce point est

$$y = \varphi(1) + \varphi'(1)(x - 1) = e(x - 1).$$

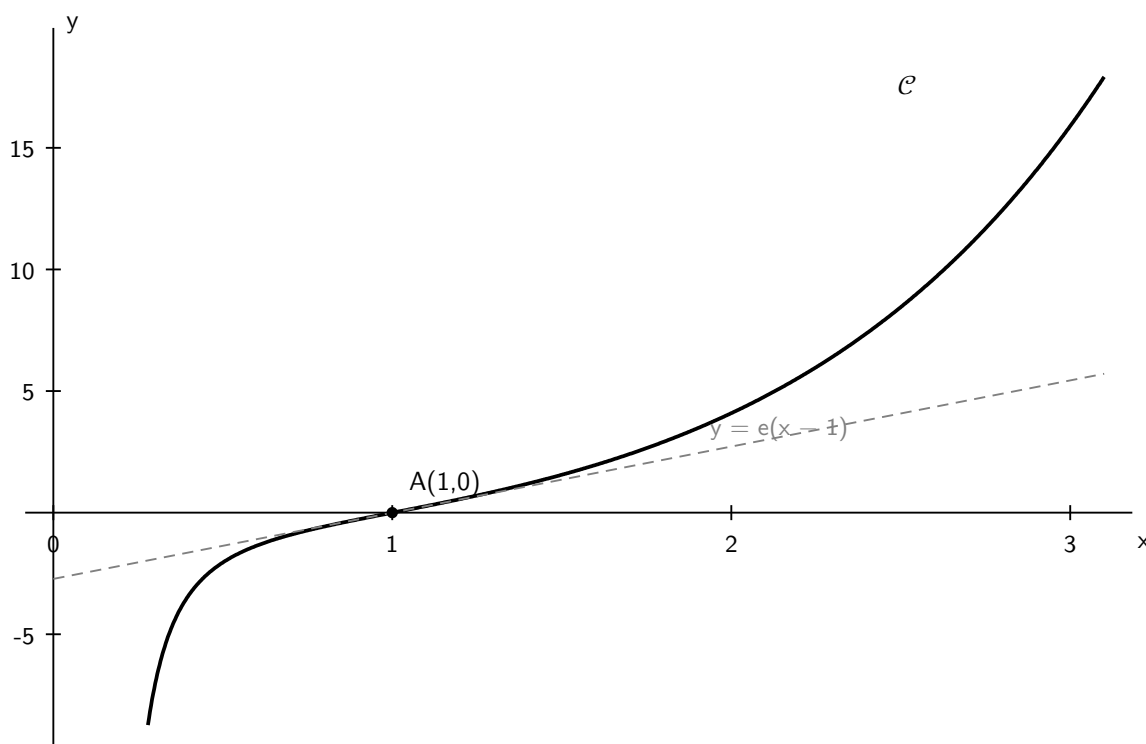
7. Puisque $\varphi'(x) \geq e > 0$, φ est strictement croissante sur tout son domaine. Son tableau est :

x	0^+	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	e	+
$\varphi(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

La courbe monte de $-\infty$ à $+\infty$, en passant par $A(1, 0)$; la concavité devient convexité en A . La droite $x = 0$ est une asymptote verticale. À l'infini, $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ et $\varphi(x)/x \rightarrow +\infty$:

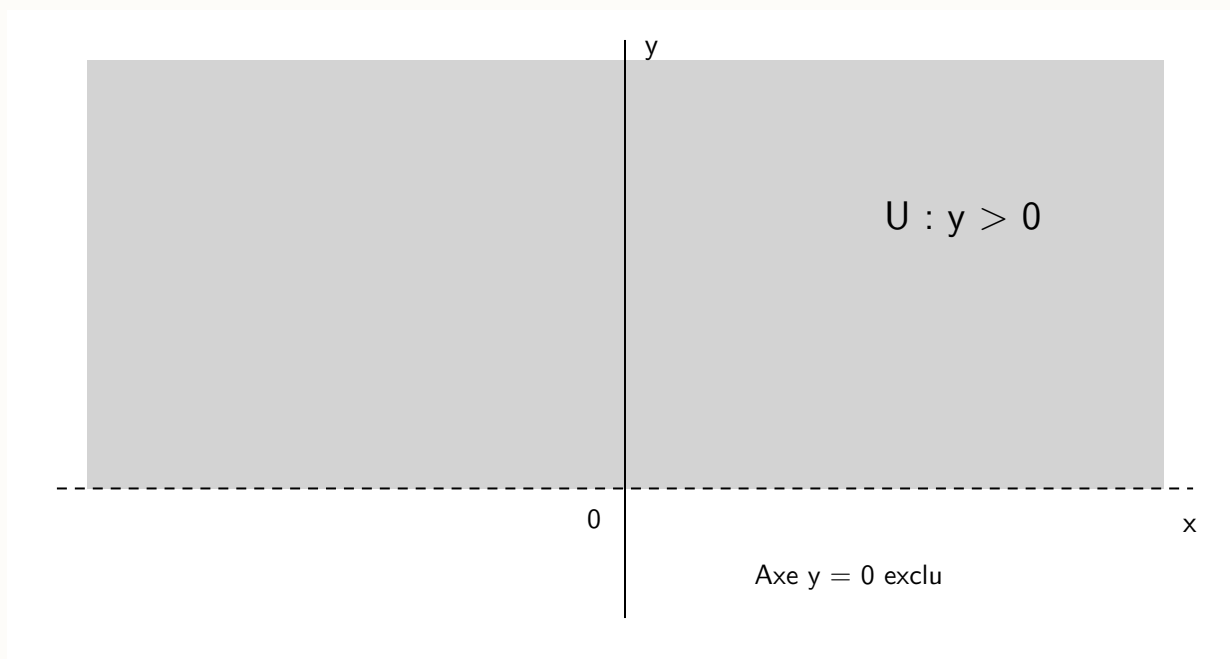
la branche est parabolique de direction verticale, sans asymptote oblique.

La figure suivante trace la fonction donnée et sa tangente ; elle représente une fenêtre bornée de ces branches infinies.



Partie II : Étude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

8. L'ensemble U est le demi-plan supérieur strict : tous les points dont l'ordonnée est positive, sans l'axe des abscisses. C'est l'ouvert indiqué dans l'énoncé ; il n'est pas borné. La région grisée ci-dessous se prolonge indéfiniment vers la gauche, la droite et le haut ; l'axe pointillé est exclu.



9. Sur $U, y > 0$: les fonctions $(x, y) \mapsto xy$, $(x, y) \mapsto e^x$ et $(x, y) \mapsto \ln y$ sont de classe C^2 .
Leurs produits et différences le sont également.

$$\partial_x f(x, y) = y - e^x \ln y, \quad \partial_y f(x, y) = x - \frac{e^x}{y}.$$

$$\partial_{xx} f(x, y) = -e^x \ln y, \quad \partial_{xy} f(x, y) = \partial_{yx} f(x, y) = 1 - \frac{e^x}{y}, \quad \partial_{yy} f(x, y) = \frac{e^x}{y^2}.$$

10. Supposons d'abord que (x, y) est critique. L'égalité $\partial_y f = 0$ donne $xy = e^x$, donc $x > 0$ car $y > 0$. Elle donne aussi $e^x/y = x$. L'égalité $\partial_x f = 0$ s'écrit alors $1 = x \ln y$, donc $y = e^{1/x}$. Enfin $xy = e^x$ devient $xe^{1/x} = e^x$, soit $\varphi(x) = 0$.

Réciproquement, si $x > 0, y = e^{1/x}$ et $\varphi(x) = 0$, alors $xy = xe^{1/x} = e^x$ et $\ln y = 1/x$. On en déduit $\partial_y f = x - e^x/y = 0$ et $\partial_x f = y - e^x/x = 0$. L'équivalence est donc établie dans les deux sens.

11. La fonction φ est strictement croissante et $\varphi(1) = 0$. L'équation $\varphi(x) = 0$ possède donc l'unique solution $x = 1$. La question précédente impose alors $y = e^{1/1} = e$. Le point critique unique est $(1, e)$.

- 12.** Question adaptée au programme actuel : on utilise les valeurs propres de la hessienne.

La fonction est de classe C^2 sur l'ouvert U et $(1, e)$ est critique. Les formules de la question 9 donnent

$$\nabla^2 f(1, e) = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & 1/e \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs colonnes ${}^t(1, 0)$ et ${}^t(0, 1)$ sont des vecteurs propres associés respectivement à $-e < 0$ et $1/e > 0$. Le critère de la hessienne s'applique donc : $(1, e)$ est un point selle et n'est pas un extremum local.

- 13.** Si f admettait un extremum local en un point de l'ouvert U , ses dérivées premières s'y annuleraient, car f est de classe C^1 . Or son seul point critique est $(1, e)$, qui n'est pas un extremum local. Ainsi f ne possède aucun extremum local sur U .

Partie III : Étude d'une suite et d'une série

- 14.** Raisonnons par récurrence sur l'existence de u_n et la minoration simultanément. Au rang 0, $u_0 = 3 = 3e^0$ est défini. Si u_n est défini et $u_n \geq 3e^n \geq 3$, alors u_n appartient au domaine de φ , donc u_{n+1} existe. La question 5 donne

$$u_{n+1} = \varphi(u_n) \geq eu_n \geq 3e^{n+1}.$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 15.** Comme $u_n \geq 3 > 0$ et $e > 1$, on a $u_{n+1} \geq eu_n > u_n$. La suite est strictement croissante. D'autre part, $3e^n \rightarrow +\infty$; la minoration de la question 14 entraîne $u_n \rightarrow +\infty$.

- 16.** Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

Python

```
from math import exp

n = 0
u = 3.0

while u < 1000:
    u = exp(u) - u * exp(1 / u)
    n = n + 1

print(n)
```

Au début de chaque passage dans la boucle, u représente u_n . L'initialisation correspond à u_0 . Le calcul remplace u par u_{n+1} , puis augmente l'indice d'une unité. La divergence de la suite garantit l'arrêt. La stricte croissance et le test strict $u < 1000$ garantissent que l'indice affiché est le plus petit qui convient.

Le code a été exécuté : il affiche 2. En effet, $u_1 \simeq 15,8987 < 1000$ et $u_2 \simeq 8,03 \times 10^6 > 1000$. L'exponentielle n'est pas calculée au-delà de u_1 , puisque la boucle s'arrête dès le calcul de u_2 .

17. On a $0 < 1/u_n \leq e^{-n}/3$. Pour rester au niveau d'une étude directe de sommes partielles, posons

$$S_N = \sum_{n=0}^N 1/u_n.$$

Les termes étant positifs, (S_N) est croissante et

$$S_N \leq \frac{1}{3} \sum_{n=0}^N e^{-n} = \frac{1 - e^{-(N+1)}}{3(1 - e^{-1})} \leq \frac{1}{3(1 - e^{-1})}.$$

Ainsi les sommes partielles sont croissantes et majorées ; elles convergent. La série

$$\sum_{n \geq 0} 1/u_n$$

est donc convergente, sans recours à un critère de série extérieur au cadre demandé.

EXERCICE 2

1. Toute matrice de $\mathcal{E}$ s'écrit $aA + bB + cC$. Par conséquent $\mathcal{E} = \text{Vect}(A, B, C)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si $aA + bB + cC = 0$, l'examen des coefficients $(1, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 2)$ donne successivement $a = b = c = 0$. La famille est libre et génératrice : c'est une base, et $\dim \mathcal{E} = 3$.

2. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} d & h \\ 0 & k \end{pmatrix}$, alors

$$MN = \begin{pmatrix} ad & ah + bk \\ 0 & ck \end{pmatrix} \in \mathcal{E}.$$

La stabilité est démontrée pour tous les coefficients réels.

3. Méthode 1 — Calcul de l'inverse d'ordre deux

Le déterminant d'ordre 2 de M vaut ac . Si M est inversible, $ac \neq 0$, et donc $a \neq 0$ et $c \neq 0$. La formule de l'inverse, ou une multiplication directe, donne

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/(ac) \\ 0 & 1/c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}.$$

Méthode 2 — Résolution triangulaire

L'inversibilité de M impose $a \neq 0$: sinon sa première colonne est nulle. Elle impose aussi $c \neq 0$: sinon sa seconde ligne est nulle. Pour résoudre $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$, la seconde équation donne $y = s/c$, puis la première donne $x = r/a - bs/(ac)$. Les coefficients de cette solution en fonction de r, s fournissent l'inverse ci-dessus. Cette démarche utilise les systèmes, tandis que la première réemploie la formule spécifique aux matrices d'ordre deux.

4. Comme $T \in \mathcal{E}$, la stabilité multiplicative entraîne $TMT \in \mathcal{E}$ pour tout $M \in \mathcal{E}$. Pour $M, N \in \mathcal{E}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la distributivité donne

$$f(\alpha M + \beta N) = T(\alpha M + \beta N)T = \alpha f(M) + \beta f(N).$$

L'application est donc linéaire de $\mathcal{E}$ dans lui-même : c'est un endomorphisme.

5. Le produit de T et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans chacun des deux sens est la matrice identité. Ainsi

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}.$$

L'application $h : N \mapsto T^{-1}NT^{-1}$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ pour les mêmes raisons que f . Par associativité, $h(f(M)) = M$ et $f(h(N)) = N$. Elle est donc l'inverse de f ; ainsi f est un automorphisme.

6. Si $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec un vecteur non nul, alors $y = \lambda y$ et $x + y = \lambda x$. Si $\lambda \neq 1$, la première équation impose $y = 0$ et la seconde $x = 0$, contradiction. La seule valeur propre est donc 1, et son sous-espace propre est $\{^t(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, de dimension 1. Il ne fournit pas une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi T n'est pas diagonalisable.

7. Pour $M = aA + bB + cC$, la multiplication donne

$$TMT = \begin{pmatrix} a & a+b+c \\ 0 & c \end{pmatrix} = aA + (a+b+c)B + cC.$$

On lit alors $f(A) = A + B$, $f(B) = B$ et $f(C) = B + C$. En plaçant leurs coordonnées dans les colonnes, on obtient

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. La relation $f(M) = \lambda M$ impose $a = \lambda a$, $c = \lambda c$ et $a + b + c = \lambda b$. Si $\lambda \neq 1$, les deux premières égalités donnent $a = c = 0$; la troisième donne alors $b = 0$. Aucun vecteur propre non nul ne peut donc être associé à une telle valeur.

En revanche $f(B) = B$ et $B \neq 0$, donc 1 est valeur propre. Pour $\lambda = 1$, la seule contrainte est $a + c = 0$. Le sous-espace propre est donc

$$E_1(f) = \{a(A - C) + bB : (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(A - C, B).$$

La famille $(A - C, B)$ est libre, car la lecture des coefficients donne $a = b = 0$ si $a(A - C) + bB = 0$. Elle est donc une base de ce sous-espace, de dimension 2.

9. Si f était diagonalisable, $\mathcal{E}$ posséderait une base de vecteurs propres. Tous appartiendraient à $E_1(f)$, qui est de dimension 2, alors que $\dim \mathcal{E} = 3$. C'est impossible. Ainsi f n'est pas diagonalisable.

10. Pour $\lambda \neq 1$, le calcul de la question 8 impose $a = c = b = 0$. Réciproquement, $f(0) = 0 = \lambda 0$. L'ensemble des solutions est donc réduit à la matrice nulle.

- 11.** Les deux seules entrées non nulles de H sont sur sa deuxième ligne, tandis que sa deuxième colonne est nulle. La multiplication donne donc $H^2 = 0$. Les matrices I et aH commutent, car $I(aH) = (aH)I = aH$. Le binôme matriciel s'applique ; tous les termes contenant une puissance de H d'exposant au moins 2 sont nuls. Ainsi

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (I + aH)^n = I + naH.$$

Pour $n = 0$, les deux membres valent bien I . Pour $n = 1$, l'égalité est immédiate ; la formule du binôme justifie les autres cas.

- 12.** Comme $F = I + H$, la question 11 avec $a = 1$ fournit

$$F^n = I + nH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- 13.** Avec $a = 1/3$ et $n = 3$, la question 11 donne $(I + H/3)^3 = I + H = F$. On peut donc choisir

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Toute matrice carrée d'ordre 3 définit un unique endomorphisme de $\mathcal{E}$ dans la base (A, B, C) . Soit g celui de matrice G . La matrice de $g \circ g \circ g$ est $G^3 = F$, donc $g \circ g \circ g = f$. Concrètement,

$$g(aA + bB + cC) = aA + \left(b + \frac{a+c}{3}\right)B + cC.$$

Trois applications successives ajoutent $a + c$ à la coordonnée de B , sans modifier celles de A et C , ce qui retrouve directement la formule de f .

EXERCICE 3

Les tirages avec remise sont indépendants et uniformes. Ainsi chaque liste de r résultats prescrits a la probabilité n^{-r} . La première absence de diminution intervient nécessairement au plus tard au rang $n + 1$, puisqu'une liste strictement décroissante de $n + 1$ numéros pris parmi n valeurs n'existe pas.

Partie I : Étude du cas $n = 3$

1. a. Pour avoir $X_3 = 4$, les trois premiers résultats doivent être strictement décroissants. Il n'existe qu'une liste possible : 3, 2, 1. Le quatrième numéro est alors nécessairement supérieur ou égal à 1. Donc

$$(X_3 = 4) = (N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1).$$

Par indépendance, $P(X_3 = 4) = (1/3)^3 = 1/27$.

- b. On a $X_3 = 2$ si et seulement si $N_2 \geq N_1$. Parmi les neuf couples équiprobables, les couples favorables sont (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3), soit six couples. Ainsi $P(X_3 = 2) = 6/9 = 2/3$.

Les trois valeurs possibles de X_3 forment un système complet; par conséquent

$$P(X_3 = 3) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{27} = \frac{8}{27}.$$

2. La variable est à valeurs dans un ensemble fini, donc admet une espérance. Sa loi donne

$$E(X_3) = 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{8}{27} + 4 \times \frac{1}{27} = \frac{36 + 24 + 4}{27} = \frac{64}{27}.$$

Partie II : Cas général

3. Chaque N_k suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Ainsi

$$P(N_k = i) = \frac{1}{n} \quad (1 \leq i \leq n), \quad E(N_k) = \frac{n+1}{2}, \quad V(N_k) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Ces moments existent car les supports sont finis.

4. L'événement $X_n = n+1$ impose $N_1 > \dots > N_n$, donc nécessairement

$N_1 = n, N_2 = n-1, \dots, N_n = 1$. Réciproquement cette liste assure que la première absence de diminution se produit au tirage suivant. L'indépendance donne donc

$$P(X_n = n+1) = \frac{1}{n^n}.$$

5. L'événement $N_1 = i$ a la probabilité $1/n > 0$, donc le conditionnement est défini. Sous cette condition, $X_n = 2$ équivaut à $N_2 \geq i$. Le deuxième tirage est indépendant du premier et les $n-i+1$ numéros $i, i+1, \dots, n$ sont équiprobables. Ainsi

$$P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n-i+1}{n}.$$

6. Méthode 1 — Probabilités totales

Les événements $N_1 = i, 1 \leq i \leq n$, forment un système complet d'événements de probabilités positives. Par la formule des probabilités totales,

$$P(X_n = 2) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{n-i+1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n j = \frac{n+1}{2n}.$$

Méthode 2 — Symétrie entre deux tirages

Les couples (N_1, N_2) sont uniformes; échanger les deux coordonnées conserve les

probabilités. Donc $P(N_2 > N_1) = P(N_1 > N_2)$. De plus, $P(N_1 = N_2) = n/n^2 = 1/n$. Les trois événements comparant les résultats forment une partition, d'où $P(N_2 > N_1) = (1 - 1/n)/2$. En ajoutant la probabilité d'égalité, on obtient $P(N_2 \geq N_1) = (n + 1)/(2n)$. La première méthode suit le conditionnement demandé; la seconde exploite la symétrie du modèle.

7. Question adaptée au programme actuel : l'indication de comptage rend explicite la correspondance utilisée.

L'inégalité $X_n > k$ signifie qu'aucun des tirages de rang 2 à k ne réalise une absence de diminution. Elle équivaut donc exactement à $N_1 > N_2 > \dots > N_k$.

Pour chaque partie de k éléments de $\{1, \dots, n\}$, il existe une unique liste strictement décroissante ayant ces éléments. Réciproquement, toute liste strictement décroissante fournit une telle partie. Il y a donc $\binom{n}{k}$ listes favorables parmi les n^k listes équiprobables. Ainsi

$$P(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}.$$

Pour $k = 0$, $X_n > 0$ est certain et $n^0 = 1$, $\binom{n}{0} = 1$. Pour $k = 1$, $X_n > 1$ est certain et $\binom{n}{1}/n = 1$. La formule est donc également valable dans ces deux cas.

8. Comme X_n est à valeurs entières, $(X_n > k - 1)$ est la réunion disjointe de $(X_n = k)$ et $(X_n > k)$. Il en résulte

$$P(X_n = k) = P(X_n > k - 1) - P(X_n > k).$$

Pour $k = n + 1$, on utilise $P(X_n > n + 1) = 0$, puisque $X_n \leq n + 1$.

9. Posons $q_k = P(X_n > k)$. On a $q_0 = q_1 = 1$ et $q_{n+1} = 0$. La variable X_n étant bornée, son espérance existe. La question 8 donne

$$E(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} k(q_{k-1} - q_k) = \sum_{j=1}^n (j+1)q_j - \sum_{j=2}^{n+1} jq_j.$$

Les termes d'indices 2 à n se soustraient en laissant une copie de q_j ; le terme initial est

$2q_1$ et le terme final est nul. Par conséquent

$$E(X_n) = 2q_1 + \sum_{j=2}^n q_j = q_0 + q_1 + \sum_{j=2}^n q_j = \sum_{j=0}^n q_j.$$

La question 7 puis la formule du binôme donnent

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

10. Pour $2 \leq k \leq n$, les questions 7 et 8 donnent

$$P(X_n = k) = \frac{n \binom{n}{k-1} - \binom{n}{k}}{n^k}.$$

Le numérateur se simplifie en écrivant les coefficients binomiaux sous forme factorielle :

$$\begin{aligned} n \binom{n}{k-1} - \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k+1)!} (nk - (n-k+1)) = \frac{n!}{k!(n-k+1)!} (k-1)(n+1) \\ &= (k-1) \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

On obtient bien $P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}$. Pour $k = n+1$, le membre de droite vaut $n/n^{n+1} = 1/n^n$, qui est la valeur de la question 4. La formule couvre donc toute la plage demandée.

Partie III : Une convergence en loi

11. Fixons $k \geq 2$. Dès que $n \geq k$, la formule précédente est applicable et

$$\frac{1}{n^k} \binom{n+1}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n+1-j}{n} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{1-j}{n}\right).$$

Ce produit possède un nombre fixé k de facteurs, chacun tendant vers 1. Il tend donc vers $1/k!$. Ainsi $P(X_n = k) \rightarrow (k-1)/k!$.

12. Méthode 1 — Somme télescopique

Pour $k \geq 2$, on a $\frac{k-1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$. Ainsi, pour $m \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^m \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{m!} \rightarrow 1.$$

La série converge donc et sa somme est 1.

Méthode 2 — Série exponentielle

Les séries

$$\sum_{k=2}^{\infty} 1/(k-1)!$$

et

$$\sum_{k=2}^{\infty} 1/k!$$

convergent, par la série exponentielle en 1, et ont pour sommes respectives $e - 1$ et $e - 2$. La linéarité des séries convergentes donne alors la somme $(e - 1) - (e - 2) = 1$. La méthode télescopique fournit aussi le reste exact $1/m!$; la seconde rattache le calcul à une série usuelle.

La loi de Z donnée dans l'énoncé est ainsi bien normalisée. Les probabilités de X_n convergent vers celles de Z pour tout entier $k \geq 2$; pour $k < 2$, elles sont toutes nulles. La caractérisation de la convergence en loi pour des variables à valeurs entières permet donc de conclure également que X_n converge en loi vers Z .

13. Comme $Z \geq 0$, l'existence de son espérance équivaut ici à la convergence de la série des $kP(Z = k)$. Pour $k \geq 2$,

$$kP(Z = k) = \frac{k(k-1)}{k!} = \frac{1}{(k-2)!}.$$

La série exponentielle donne donc une série convergente et

$$E(Z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e.$$

Pour comparer avec les espérances de X_n , écrivons

$$\ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln(1 + 1/n)}{1/n} \rightarrow 1,$$

car la dérivabilité de $t \mapsto \ln(1 + t)$ en 0 donne $\ln(1 + t)/t \rightarrow 1$. Par continuité de l'exponentielle, $E(X_n) = (1 + 1/n)^n \rightarrow e$. Finalement

$$E(Z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = e.$$

Cette égalité a été obtenue par deux calculs explicites; elle n'est pas déduite d'une règle générale d'échange entre convergence en loi et espérance.

Relevé des adaptations

Exercice 1, préambule de la partie II et question 8 : la nature ouverte du domaine U est précisée avant sa représentation, conformément au cadrage topologique du programme.

Exercice 1, question 12 : Question adaptée au programme actuel. La consigne précise le recours à la hessienne et aux signes de ses valeurs propres, sans déterminant.

Exercice 1, question 16 : Code adapté en Python. La demande de programmation est transposée en Python et la commande exponentielle utile est documentée.

Exercice 3, exemple introductif : le numéro 6 du cinquième tirage est impossible dans une urne numérotée de 1 à 5. Il est remplacé par 5, sans effet sur le rang $X_5 = 4$, déjà déterminé au quatrième tirage.

Exercice 3, question 7 : Question adaptée au programme actuel. Une indication explicite la bijection élémentaire entre choix de numéros distincts et listes strictement décroissantes.