



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2012

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Partie I : Étude de la matrice B

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B . Est-ce que B est diagonalisable ?
2. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que $B = PDP^{-1}$.
3. Vérifier que $D^2 = 5D - 4I$ et exprimer B^2 comme combinaison linéaire de B et I .
4. Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} comme combinaison linéaire de B et I .

Partie II : Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application $h : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \longmapsto h(M) = AMB$.

1. Vérifier que h est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que h est bijectif et exprimer h^{-1} sous une forme analogue à celle donnée pour h .
3. On se propose dans cette question de déterminer les valeurs propres de h .

3. a. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $N = MP$, où P est la matrice définie dans la question I.2.

Montrer : $h(M) = \lambda M \iff AND = \lambda N$, où D est la matrice définie dans la question I.2.

3. b. Déterminer les réels λ pour lesquels il existe une matrice N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle

telle que $AND = \lambda N$. À cet effet, on pourra noter $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

3. c. En déduire les valeurs propres de h . Montrer que h est diagonalisable et donner une matrice diagonale représentant h .
3. d. On note e l'endomorphisme identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note 0 l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer :

$$(h - e) \circ (h + e) \circ (h - 4e) \circ (h + 4e) = 0.$$

Exercice 2

Partie I : Étude d'une fonction d'une variable réelle

On considère l'application $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0; +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t \ln t & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0; +\infty[$.

3. Dresser le tableau de variations de f . On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que f est convexe sur $]0; +\infty[$.
5. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; i, j)$.
 5. a. Montrer que Γ admet une demi-tangente en O et préciser celle-ci.
 5. b. Déterminer les points d'intersection de Γ et de l'axe des abscisses.
 5. c. Préciser la nature de la branche infinie de Γ .
 5. d. Tracer l'allure de Γ . On admet : $0,36 \leq e^{-1} < 0,37$.

Partie II : Étude d'une fonction de deux variables réelles

Le domaine $U =]0; +\infty[^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On considère l'application $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 définie, pour tout $(x, y) \in U$, par :

$$F(x, y) = \frac{\ln x}{y} + \frac{\ln y}{x}.$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout $(x, y) \in U$.
2. Montrer que (e, e) est un point critique de F .
3. Calculer les dérivées partielles secondes de F en tout $(x, y) \in U$.
4. Est-ce que F admet un extremum local en (e, e) ?

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 0$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$$

est convergente.

2. a. Rappeler une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance nulle et de variance a^2 . En déduire : $I_0 = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2. b. Calculer la dérivée de l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

En déduire : $I_1 = a^2$.

3. a. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 2$ et pour tout $t \in [0; +\infty[$:

$$\int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = -a^2 t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2 \int_0^t x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx.$$

3. b. En déduire que, pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $I_n = (n-1)a^2 I_{n-2}$.

3. c. Calculer I_2 et I_3 .

On considère l'application $g_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

4. Montrer que g_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant g_a comme densité.

5. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X .
6. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ et que

$$E(X) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

7. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$.
8. a. On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0; 1]$.
Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln U}$ suit la même loi que la variable aléatoire X .
8. b. En déduire un programme en Python simulant la variable aléatoire X , le réel a strictement positif étant entré par l'utilisateur.

On pourra utiliser `numpy.random.random()` qui renvoie un nombre pseudo-aléatoire dans $[0; 1[$. Ainsi, `1 - numpy.random.random()` simule une uniforme sur $]0; 1]$. Les commandes `numpy.log(u)` et `numpy.sqrt(v)` calculent respectivement le logarithme de $u > 0$ et la racine carrée de $v \geq 0$. La commande `float(input(...))` lit un nombre réel saisi par l'utilisateur, et `print(...)` affiche une valeur.

Soit un entier n tel que $n \geq 2$.

On dit que n variables aléatoires à densité $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes si, pour tout n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de réels, les événements $(X_1 \leq x_1), (X_2 \leq x_2), \dots, (X_n \leq x_n)$ sont mutuellement indépendants.

On admet que, si n variables aléatoires à densité $X_1, X_2, \dots, X_n$ admettent une espérance, alors la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ admet une espérance qui est égale à la somme des espérances.

On admet que, si n variables aléatoires à densité $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et admettent une variance, alors la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance qui est égale à la somme des variances.

On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivant toutes la même loi que la variable aléatoire X .

Un estimateur de a est une variable aléatoire calculée à partir de cet échantillon, par une formule ne dépendant pas de a . Sa valeur observée est une estimation de a . Le biais d'un estimateur T admettant une espérance est $E(T) - a$; il est sans biais si ce nombre est nul. Son risque quadratique est $R_a(T) = E((T - a)^2)$, lorsque cette espérance existe.

9. On considère la variable aléatoire $A_n = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$.

9. a. Montrer que la variable aléatoire A_n est un estimateur sans biais de a .

9. b. Déterminer le risque quadratique de l'estimateur A_n .

On définit la variable aléatoire $M_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (M_n > t) = (X_1 > t) \cap (X_2 > t) \cap \dots \cap (X_n > t).$$

10. a. Montrer que, pour tout $t \in [0; +\infty[$:

$$P(M_n > t) = e^{-\frac{nt^2}{2a^2}}.$$

10. b. En déduire la fonction de répartition de M_n .

10. c. Montrer que M_n est une variable aléatoire à densité, admettant g_b comme densité avec $b = \frac{a}{\sqrt{n}}$.
10. d. Montrer que la variable aléatoire M_n admet une espérance $E(M_n)$ et une variance $\mathbb{V}(M_n)$. Calculer $E(M_n)$ et $\mathbb{V}(M_n)$.
11. a. En déduire un estimateur B_n sans biais de a , de la forme $\lambda_n M_n$ avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.
11. b. Déterminer le risque quadratique de l'estimateur B_n .