



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2012

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie I : Étude de la matrice B

1. On cherche directement des vecteurs propres, sans calcul de déterminant dépendant d'un paramètre. Les produits donnent :

$$B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $(2, -1)$ et $(1, 1)$ sont associés à deux valeurs propres distinctes, donc forment une famille libre. Cette famille de deux vecteurs est une base de $\mathbb{R}^2$: B est diagonalisable et ses seules valeurs propres sont 1 et 4.

Pour préciser les sous-espaces propres, on résout les deux systèmes numériques. L'égalité $B(x, y)^T = (x, y)^T$ équivaut à $x + 2y = 0$, et l'égalité $B(x, y)^T = 4(x, y)^T$ équivaut à $y = x$. Ainsi :

$$E_1(B) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_4(B) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. La première colonne de P doit être un vecteur propre associé à 1, et la seconde un vecteur propre associé à 4. La normalisation demandée impose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice P est inversible, puisque ses colonnes forment la base précédente après

multiplication de la première par $1/2$. On peut vérifier par produit :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Les égalités de la question 1 donnent $BP = PD$. En multipliant à droite par P^{-1} , on obtient bien $B = PDP^{-1}$.

3. Le calcul diagonal donne $D^2 = \text{diag}(1, 16)$ et $5D - 4I = \text{diag}(1, 16)$. Par conséquent :

$$B^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1} = P(5D - 4I)P^{-1} = 5B - 4I.$$

Donc $B^2 = 5B - 4I$. Un contrôle direct donne aussi $B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$, ce qui coïncide avec $5B - 4I$.

4. Méthode 1 — Utiliser la relation obtenue

La relation $B^2 - 5B = -4I$ se réécrit $B(5I - B) = 4I$. Ainsi $B \left(\frac{5I - B}{4} \right) = I$. Une matrice carrée ayant un inverse à droite est inversible ; ici les deux facteurs commutent également. On conclut :

$$B^{-1} = \frac{5}{4}I - \frac{1}{4}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 — Utiliser la diagonalisation

Les deux coefficients diagonaux de D sont non nuls, donc $D^{-1} = \text{diag}(1, 1/4)$ existe. La factorisation de la question 2 donne alors $B^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. Pour chacun des deux coefficients diagonaux, on vérifie $1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \frac{4}{4}$, d'où $D^{-1} = \frac{5}{4}I - \frac{1}{4}D$. Ainsi :

$$B^{-1} = P \left(\frac{5}{4}I - \frac{1}{4}D \right) P^{-1} = \frac{5}{4}I - \frac{1}{4}B.$$

La première méthode exploite immédiatement une identité matricielle ; la seconde montre comment une diagonalisation permet de calculer un inverse.

Partie II : Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. Pour $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la distributivité du produit matriciel donne :

$$h(\alpha M + \beta N) = A(\alpha M + \beta N)B = \alpha AMB + \beta ANB = \alpha h(M) + \beta h(N).$$

Les produits sont encore des matrices réelles d'ordre 2. Ainsi h est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même, donc un endomorphisme.

2. Puisque $A^2 = I$, la matrice A est inversible et $A^{-1} = A$. La partie I a établi que B est inversible. Pour une matrice Y , l'équation $AMB = Y$ équivaut, en multipliant à gauche par A et à droite par B^{-1} , à $M = AYB^{-1}$.

Il existe donc une unique solution pour tout Y : h est bijectif et

$$h^{-1}(Y) = AYB^{-1} = AY \left(\frac{5}{4}I - \frac{1}{4}B \right).$$

Les deux compositions se vérifient directement : $A(AYB^{-1})B = Y$ et $A(AMB)B^{-1} = M$.

3. Pour travailler dans le cadre concret des matrices, on utilise d'abord la base

canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si $M = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}$, alors

$$h(M) = \begin{pmatrix} 2u + v & 2u + 3v \\ -2w - z & -2w - 3z \end{pmatrix}.$$

La matrice de h dans cette base est donc

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Les questions suivantes construisent une base dans laquelle cette matrice devient diagonale.

3. a. On a $BP = PD$, donc, en multipliant l'égalité $AMB = \lambda M$ à droite par P :

$$AMB = \lambda M \Leftrightarrow AMBP = \lambda MP \Leftrightarrow A(MP)D = \lambda(MP) \Leftrightarrow AND = \lambda N.$$

Chaque équivalence est réversible car P est inversible. De plus, $M \neq 0$ si et seulement si $N = MP \neq 0$.

3. b. Pour $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on calcule :

$$AND = \begin{pmatrix} x & 4y \\ -z & -4t \end{pmatrix}.$$

L'égalité demandée équivaut aux quatre relations

$$(1 - \lambda)x = 0, \quad (4 - \lambda)y = 0, \quad (-1 - \lambda)z = 0, \quad (-4 - \lambda)t = 0.$$

Si λ n'appartient pas à $\{1, 4, -1, -4\}$, elles imposent $x = y = z = t = 0$. Si λ est respectivement 1, 4, -1 ou -4, les solutions forment respectivement $\text{Vect}(E_{11})$, $\text{Vect}(E_{12})$, $\text{Vect}(E_{21})$ ou $\text{Vect}(E_{22})$. Chacun de ces espaces contient des matrices non nulles. Les réels recherchés sont donc exactement 1, 4, -1, -4.

3. c. Grâce à 3.a et à l'inversibilité de $M \mapsto MP$, les valeurs propres recherchées sont celles obtenues en 3.b. Posons

$$U_{11} = E_{11}P^{-1}, \quad U_{12} = E_{12}P^{-1}, \quad U_{21} = E_{21}P^{-1}, \quad U_{22} = E_{22}P^{-1}.$$

Ces quatre matrices forment une base : si leur combinaison linéaire est nulle, une multiplication à droite par P ramène à une combinaison nulle de la base canonique, donc tous les coefficients sont nuls ; une famille libre de quatre éléments dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une base.

Par 3.a-b, on a respectivement $h(U_{11}) = U_{11}$, $h(U_{12}) = 4U_{12}$, $h(U_{21}) = -U_{21}$ et $h(U_{22}) = -4U_{22}$. La matrice de h dans cette base est donc

$$\Delta = \text{diag}(1, 4, -1, -4).$$

Ainsi la matrice concrète H est semblable à une matrice diagonale ; cela établit la diagonalisation demandée de h .

3. d. Dans la base précédente, les matrices des quatre facteurs sont $\Delta - I_4, \Delta + I_4, \Delta - 4I_4, \Delta + 4I_4$. Leur produit est diagonal. Pour chaque coefficient diagonal $\delta \in \{1, 4, -1, -4\}$, le coefficient du produit vaut $(\delta - 1)(\delta + 1)(\delta - 4)(\delta + 4) = 0$. Le produit est donc la matrice nulle.

Le produit matriciel représente la composition des endomorphismes. Une application linéaire dont la matrice est nulle est nulle ; on a bien

$$(h - e) \circ (h + e) \circ (h - 4e) \circ (h + 4e) = 0.$$

Exercice 2

Partie I : Étude d'une fonction d'une variable réelle

- Sur $]0; +\infty[$, les fonctions $t \mapsto t$ et $\ln$ sont continues, donc leur produit est continu. La croissance comparée du logarithme et d'une puissance donne $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0 = f(0)$. Ainsi f est continue aussi en 0, et donc sur $[0; +\infty[$.
- Le produit de deux fonctions de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ est de classe C^1 sur cet intervalle. Pour $t > 0$:

$$f'(t) = \ln t + t \frac{1}{t} = \ln t + 1.$$

- L'équation $f'(t) = 0$ équivaut à $\ln t = -1$, soit $t = e^{-1}$. Le logarithme étant strictement croissant, f' est négative sur $]0; e^{-1}[$ et positive sur $]e^{-1}; +\infty[$. La continuité en 0 permet d'inclure ce bord dans les variations.

t	0	e^{-1}	$+\infty$
Variations de f	0	minimum $-e^{-1}$	$+\infty$
Sens	décroissante vers le minimum	puis croissante	

En effet, $f(e^{-1}) = -e^{-1}$ et $t \ln t \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Le minimum global de f vaut donc $-e^{-1}$ et est atteint seulement en e^{-1} .

4. La fonction est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et $f''(t) = 1/t > 0$ sur cet intervalle. Le critère de convexité des fonctions de classe C^2 montre que f y est convexe, et même strictement convexe.

5. Étude de la courbe Γ dans le repère orthonormal.

5. a. Le quotient de la corde issue de l'origine vaut, pour $t > 0$,

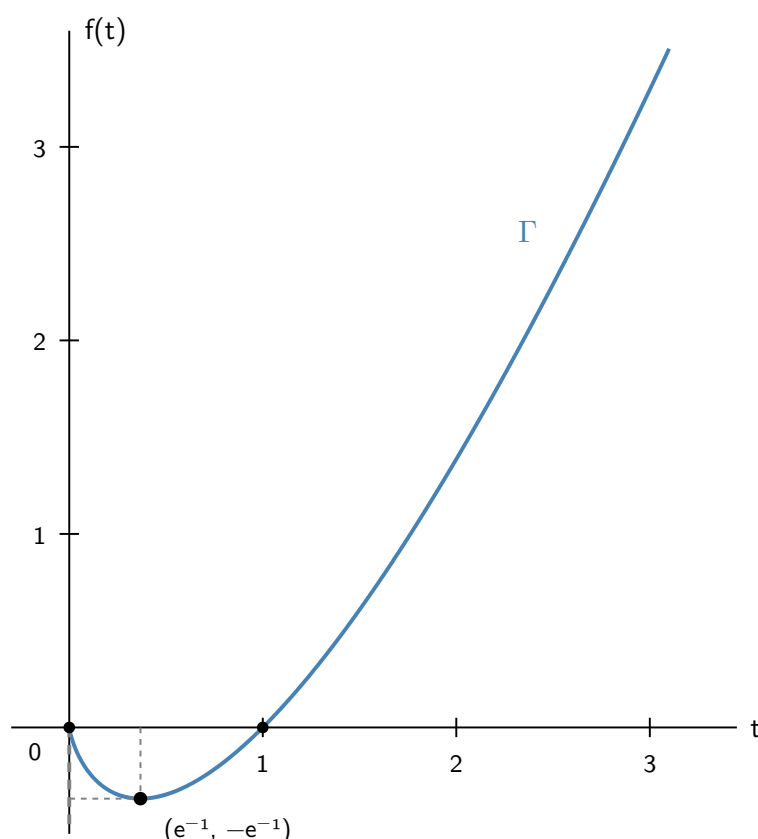
$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \ln t \rightarrow -\infty \quad (t \rightarrow 0^+).$$

La courbe possède donc en O une demi-tangente verticale. Comme $f(t) < 0$ pour $0 < t < 1$, cette demi-tangente est dirigée vers le bas : c'est la demi-droite d'équation $t = 0$ et d'ordonnée négative ou nulle.

5. b. On a $f(0) = 0$. Pour $t > 0$, l'égalité $f(t) = 0$ équivaut à $\ln t = 0$, donc à $t = 1$. Les deux intersections sont $O = (0, 0)$ et $(1, 0)$.

5. c. On sait que $f(t) \rightarrow +\infty$ et l'on a $f(t)/t = \ln t \rightarrow +\infty$. La branche infinie monte donc dans la direction de l'axe des ordonnées ; dans la terminologie usuelle, c'est une branche parabolique de direction verticale. En particulier elle n'a pas d'asymptote affine.

5. d. La courbe part de l'origine avec la demi-tangente verticale descendante, atteint le minimum $(e^{-1}, -e^{-1})$, puis remonte en restant convexe ; elle coupe l'axe horizontal en $(1, 0)$. Le dessin suivant est calculé à partir de la formule $f(t) = t \ln t$ dans un repère orthonormal. Les repères décimaux du minimum sont seulement approchés ; ses coordonnées exactes sont celles données ci-dessus.



Partie II : Étude d'une fonction de deux variables réelles

Le domaine $U =]0; +\infty[^2$ est ouvert, comme indiqué dans le sujet. Les logarithmes y sont définis, les dénominateurs ne s'annulent pas et les opérations sur les fonctions de classe C^2 assurent que F est de classe C^2 sur cet ouvert.

1. En dérivant chaque terme par rapport à la variable concernée, pour $(x, y) \in U$:

$$\partial_1 F(x, y) = \frac{1}{xy} - \frac{\ln y}{x^2}, \quad \partial_2 F(x, y) = -\frac{\ln x}{y^2} + \frac{1}{xy}.$$

2. Comme $\ln e = 1$, les deux dérivées au point (e, e) valent $e^{-2} - e^{-2} = 0$. Ainsi

$$\nabla F(e, e) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } (e, e) \text{ est bien un point critique.}$$

3. Une nouvelle dérivation donne :

$$\partial_{1,1}^2 F(x, y) = -\frac{1}{x^2 y} + \frac{2 \ln y}{x^3}, \quad \partial_{2,2}^2 F(x, y) = \frac{2 \ln x}{y^3} - \frac{1}{x y^2}.$$

Pour les dérivées croisées, on obtient dans les deux cas :

$$\partial_{1,2}^2 F(x, y) = \partial_{2,1}^2 F(x, y) = -\frac{1}{x y^2} - \frac{1}{x^2 y}.$$

Cette égalité est aussi garantie par le théorème de Schwarz, puisque F est de classe C^2 sur l'ouvert U .

4. La hessienne au point critique est

$$\nabla^2 F(e, e) = \frac{1}{e^3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres s'obtiennent par produits directs : le vecteur $(1, 1)$ est associé à $-e^{-3}$ et le vecteur $(1, -1)$ à $3e^{-3}$. Ces deux vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$, donc ce sont toutes les valeurs propres. Elles sont non nulles et de signes opposés.

Le critère de la hessienne s'applique à la fonction de classe C^2 sur l'ouvert contenant le point critique : (e, e) est un point selle et F n'y admet aucun extremum local.

Exercice 3

1. Pour tout entier $n \geq 0$, la fonction $x \mapsto x^n e^{-x^2/(2a^2)}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$. Pour étudier la borne infinie, on écrit, pour $x > 0$,

$$x^2 x^n e^{-x^2/(2a^2)} = \exp\left((n+2) \ln x - \frac{x^2}{2a^2}\right).$$

Puisque $\ln x/x^2 \rightarrow 0$, l'exposant tend vers $-\infty$: il vaut $x^2((n+2) \ln x/x^2 - 1/(2a^2))$, dont le facteur entre parenthèses tend vers un nombre strictement négatif. Donc $x^n e^{-x^2/(2a^2)} = o(x^{-2})$.

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} x^{-2} dx$ converge. Le critère de comparaison pour les fonctions positives assure la convergence sur $[1; +\infty[$; la continuité assure celle sur $[0; 1]$. Ainsi I_n converge pour tout $n \geq 0$.

2. a. Une variable de loi $\mathcal{N}(0, a^2)$ admet la densité

$$p(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2a^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

L'intégrale de cette densité sur $\mathbb{R}$ vaut 1. Elle est paire : sur chaque segment symétrique, les deux moitiés ont la même intégrale ; en passant à la limite, chaque demi-droite porte une masse 1/2. Ainsi

$$\frac{I_0}{a\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2}, \quad I_0 = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2. b. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{a^2} e^{-x^2/(2a^2)}.$$

Pour $t \geq 0$, le calcul d'une primitive sur le segment $[0; t]$ donne

$$\int_0^t x e^{-x^2/(2a^2)} dx = -a^2(\varphi(t) - \varphi(0)) = a^2(1 - e^{-t^2/(2a^2)}).$$

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, l'exponentielle tend vers 0. L'intégrale de gauche tend vers I_1 par définition, d'où $I_1 = a^2$.

3. a. Fixons $n \geq 2$ et $t \geq 0$. Sur $[0; t]$, on intègre par parties avec $u(x) = x^{n-1}$ et $v'(x) = x e^{-x^2/(2a^2)}$. Les deux fonctions sont de classe C^1 sur ce segment, et l'on peut prendre $v(x) = -a^2 e^{-x^2/(2a^2)}$. Il vient

$$\int_0^t x^n e^{-x^2/(2a^2)} dx = \left[-a^2 x^{n-1} e^{-x^2/(2a^2)} \right]_0^t + (n-1)a^2 \int_0^t x^{n-2} e^{-x^2/(2a^2)} dx.$$

Le terme en 0 est nul car $n-1 \geq 1$. On obtient exactement l'identité demandée.

3. b. La même croissance comparée que dans la question 1 donne $t^{n-1} e^{-t^2/(2a^2)} \rightarrow 0$. Les deux intégrales de l'égalité précédente convergent, comme démontré en 1. On peut donc passer à la limite lorsque $t \rightarrow +\infty$ et conclure :

$$I_n = (n-1)a^2 I_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

L'intégration par parties a ainsi été pratiquée sur un segment, puis suivie d'un passage à la limite justifié.

3. c. Les cas $n = 2$ et $n = 3$ donnent successivement

$$I_2 = a^2 I_0 = a^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad I_3 = 2a^2 I_1 = 2a^4.$$

4. La fonction g_a est positive. Elle est continue sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, et sa limite à droite en 0 vaut 0, qui est aussi sa valeur et sa limite à gauche. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, grâce à 2.b,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x) dx = \frac{1}{a^2} I_1 = 1.$$

Elle satisfait donc les conditions caractérisant une densité de probabilité. Ses limites à gauche et à droite en chaque réel sont finies, conformément au cadre des densités étudiées.

5. Pour $x \leq 0$, la densité est nulle sur $] -\infty; x]$, donc $F_X(x) = 0$. Pour $x > 0$, le calcul sur le segment $[0; x]$ de 2.b donne

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{t}{a^2} e^{-t^2/(2a^2)} dt = 1 - e^{-x^2/(2a^2)}.$$

Ainsi

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - e^{-x^2/(2a^2)} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

6. Puisque X est positive presque sûrement, la convergence absolue de l'intégrale définissant son espérance revient à celle de l'intégrale positive suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| g_a(x) dx = \frac{I_2}{a^2} < +\infty.$$

L'espérance existe et les questions 3.c et 2.a donnent

$$E(X) = \frac{I_2}{a^2} = a \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

7. Le théorème de transfert appliqué à $x \mapsto x^2$, avec l'intégrale positive convergente I_3/a^2 , donne

$$E(X^2) = \frac{I_3}{a^2} = 2a^2.$$

Le second moment est fini, donc la variance existe. Par la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbb{V}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2a^2 - a^2 \frac{\pi}{2} = \frac{4-\pi}{2} a^2.$$

8. a. Comme $0 < U \leq 1$ presque sûrement, $\ln U \leq 0$ et Z est bien définie et positive. Pour $x < 0$, $P(Z \leq x) = 0$. Pour $x \geq 0$, on a, en tenant compte de $a > 0$ et en renversant l'inégalité lors de la multiplication par -1 ,

$$Z \leq x \iff -2 \ln U \leq \frac{x^2}{a^2} \iff \ln U \geq -\frac{x^2}{2a^2} \iff U \geq e^{-x^2/(2a^2)}.$$

Le dernier seuil appartient à $]0; 1]$. La loi uniforme est sans atome et, pour $u \in [0; 1]$, $P(U \geq u) = 1 - u$. Ainsi

$$P(Z \leq x) = 1 - e^{-x^2/(2a^2)} \quad (x \geq 0).$$

Pour $x = 0$, cette expression vaut 0, puisque l'événement $U = 1$ est de probabilité nulle. La fonction de répartition de Z coïncide partout avec celle de X , donc Z et X ont la même loi.

8. b. Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Le programme suivant utilise la transformation démontrée en 8.a. Le choix `1 - rd.random()` évite de calculer le logarithme de zéro, puisque le générateur renvoie un nombre dans $[0; 1[$.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

a = float(input("a strictement positif : "))

while a <= 0:
    a = float(input("Entrer a strictement positif : "))

u = 1 - rd.random()

x = a * np.sqrt(-2 * np.log(u))

print(x)
```

La boucle assure la positivité du paramètre. La variable u représente l'uniforme de $0,1$, et x la valeur simulée de X . Le code a été exécuté avec une saisie de test; il renvoie bien un nombre fini positif ou nul. La simulation illustre la loi et ne remplace pas sa démonstration.

9. La définition de biais et de risque quadratique est fournie dans le sujet pour rendre les questions suivantes autonomes. On note $c = \sqrt{2}/\sqrt{\pi}$, de sorte que $A_n = c(X_1 + \dots + X_n)/n$.

9. a. Question adaptée au programme actuel : les notions nécessaires sont définies dans le préambule.

L'estimateur A_n est calculé à partir de l'échantillon, par une formule indépendante de a . Chacune des variables X_i possède l'espérance calculée en 6; la linéarité, rappelée dans le sujet, donne

$$E(A_n) = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} na\sqrt{\frac{\pi}{2}} = a.$$

Son biais est donc nul : A_n est bien un estimateur sans biais de a .

9. b. Question adaptée au programme actuel : la définition du risque est fournie dans le préambule.

Les X_i sont indépendantes et possèdent une variance finie d'après 7. La propriété de la variance des sommes et celle de la multiplication par une constante donnent

$$\mathbb{V}(A_n) = \frac{2}{n^2\pi} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = \frac{2}{n^2\pi} n \frac{4-\pi}{2} a^2 = \frac{4-\pi}{n\pi} a^2.$$

Pour expliciter le lien avec le risque, on écrit $A_n - a = (A_n - E(A_n)) + (E(A_n) - a)$. Le développement du carré puis l'espérance donnent, le terme croisé ayant une espérance nulle,

$$R_a(A_n) = \mathbb{V}(A_n) + (E(A_n) - a)^2.$$

Toutes ces espérances existent car le second moment est fini. Le biais étant nul, on conclut

$$R_a(A_n) = \frac{4-\pi}{n\pi} a^2.$$

- 10. a.** Pour $t \geq 0$, l'indépendance des X_i entraîne celle des événements $(X_i > t)$. On peut par exemple les voir comme les complémentaires des événements $(X_i \leq t)$ dans la définition donnée. La question 5 fournit $P(X_i > t) = e^{-t^2/(2a^2)}$, y compris pour $t = 0$. Donc

$$P(M_n > t) = \prod_{i=1}^n P(X_i > t) = \left(e^{-t^2/(2a^2)}\right)^n = e^{-nt^2/(2a^2)}.$$

- 10. b.** Toutes les X_i sont positives presque sûrement, donc leur minimum aussi. Pour $t \leq 0$, $F_{M_n}(t) = 0$; en particulier il n'y a pas d'atome en 0. Pour $t > 0$, on passe à l'événement complémentaire dans la question précédente :

$$F_{M_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ 1 - e^{-nt^2/(2a^2)} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

10. c. Posons $b = a/\sqrt{n} > 0$, donc $b^2 = a^2/n$. La fonction obtenue en 10.b est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 hors de 0; sa dérivée pour $t > 0$ vaut

$$\frac{nt}{a^2} e^{-nt^2/(2a^2)} = \frac{t}{b^2} e^{-t^2/(2b^2)}.$$

Elle est nulle pour $t < 0$. La fonction g_b est donc une densité de M_n . On peut aussi constater que la fonction de répartition obtenue est exactement celle de la question 5 avec le paramètre a remplacé par b .

10. d. Les résultats 6 et 7 ont été établis pour tout paramètre strictement positif. Puisque $b > 0$ et que M_n admet g_b pour densité, ils prouvent l'existence des deux moments demandés et donnent

$$E(M_n) = b\sqrt{\frac{\pi}{2}} = a\sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \quad \mathbb{V}(M_n) = \frac{4-\pi}{2}b^2 = \frac{4-\pi}{2n}a^2.$$

11. a. Question adaptée au programme actuel : la notion de biais est définie avant la question 9.

Pour que $B_n = \lambda_n M_n$ soit sans biais, il faut et il suffit que $\lambda_n a \sqrt{\pi/(2n)} = a$. Comme $a > 0$, cela impose

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}, \quad B_n = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} M_n.$$

Le coefficient ne dépend pas du paramètre inconnu; B_n est bien un estimateur de a , et le calcul précédent établit son absence de biais.

11. b. Question adaptée au programme actuel : le risque est défini avant la question 9 et son lien à la variance a été démontré en 9.b.

La variance de M_n est finie, donc celle de B_n aussi. Puisque le biais de B_n est nul,

$$R_a(B_n) = \mathbb{V}(B_n) = \lambda_n^2 \mathbb{V}(M_n) = \frac{2n}{\pi} \frac{4 - \pi}{2n} a^2 = \frac{4 - \pi}{\pi} a^2.$$

Ce risque ne dépend pas de n , alors que celui de A_n est n fois plus petit. Cette comparaison résulte des calculs particuliers et ne requiert aucune théorie générale de l'estimation.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, partie II, préambule : le caractère ouvert du domaine $]0; +\infty[^2$ est indiqué pour appliquer le critère de la hessienne dans le cadre du programme. La question II.4 est résolue par les signes des valeurs propres, sans changer son énoncé.
- Exercice 3, question 8.b : Code adapté en Python ; la syntaxe et le rôle du générateur uniforme, du logarithme, de la racine et de la saisie sont documentés dans le sujet. La formule de simulation est conservée.
- Exercice 3, questions 9.a-b et 11.a-b : les définitions de biais, d'absence de biais et de risque quadratique sont ajoutées avant la question 9. Les résultats particuliers sont démontrés par espérances et variances, sans supposer un cours général sur ces notions.