



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2011

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie I : Étude et représentation graphique de f

1. Les fonctions $x \mapsto x + \ln x$ et $x \mapsto e^{x-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$. Leur produit f l'est donc également. La règle de dérivation d'un produit donne

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x-1} + (x + \ln x) e^{x-1} = \left(x + \ln x + 1 + \frac{1}{x}\right) e^{x-1}.$$

2. Méthode 1 — Étude d'une fonction auxiliaire

Posons $h(x) = \ln x + 1/x$ sur $]0; +\infty[$. Cette fonction est dérivable et

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

Comme $x^2 > 0$, h est décroissante sur $]0; 1]$ puis croissante sur $[1; +\infty[$. Elle admet donc son minimum global en 1, avec $h(1) = 1$. En particulier, $\ln x + 1/x \geq 1 > 0$ pour tout $x > 0$.

Méthode 2 — Tangente à la fonction logarithme

La fonction logarithme est concave sur $]0; +\infty[$ puisque sa dérivée seconde vaut $-1/x^2 < 0$. Sa courbe est donc sous sa tangente en 1 : $\ln t \leq t - 1$ pour tout $t > 0$.

Appliquons cette inégalité à $t = 1/x$:

$$-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1, \quad \text{donc} \quad \ln x + \frac{1}{x} \geq 1 > 0.$$

La première méthode décrit directement le minimum ; la seconde réutilise une inégalité de concavité qui sera utile dans d'autres comparaisons logarithmiques.

3. La question précédente donne $\ln x + 1/x \geq 1$. Par conséquent,

$$x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} \geq x + 2 > 0$$

pour tout $x > 0$, comme demandé.

4. D'après les questions 1 et 3, $f'(x)$ est le produit de deux facteurs strictement positifs sur $]0; +\infty[$. Ainsi $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, et f est strictement croissante sur cet intervalle.

5. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $x + \ln x \rightarrow -\infty$ et $e^{x-1} \rightarrow e^{-1} > 0$. Il en résulte $f(x) \rightarrow -\infty$.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, les deux facteurs $x + \ln x$ et e^{x-1} tendent vers $+\infty$; ainsi $f(x) \rightarrow +\infty$.

Les variations sont résumées par le tableau suivant.

x	0^+	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$
Variation	croissante	croissante	croissante

Enfin,

$$f(1) = (1 + \ln 1)e^0 = 1, \quad f'(1) = (1 + \ln 1 + 1 + 1)e^0 = 3.$$

6. La limite $f(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ montre que la droite $x = 0$ est une asymptote verticale.

À l'autre extrémité du domaine,

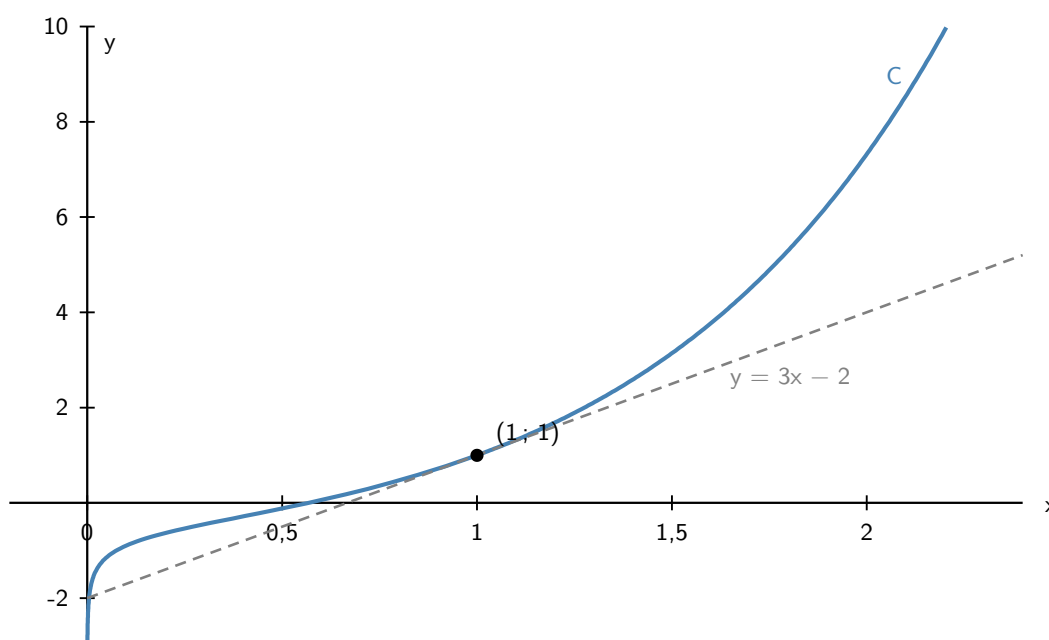
$$\frac{f(x)}{x} = \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) e^{x-1} \rightarrow +\infty,$$

car $\ln x/x \rightarrow 0$. La courbe a donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. En particulier, elle ne possède pas d'asymptote affine à cette extrémité : si $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$, alors $f(x)/x \rightarrow a$, ce qui contredirait la limite précédente.

7. La tangente au point $A = (1, 1)$ a pour équation

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 3x - 2.$$

La courbe est strictement croissante, descend vers $-\infty$ le long de $x = 0$ et monte vers $+\infty$ plus vite que toute droite. Le tracé suivant montre son allure et la tangente en A , sans supposer une étude de convexité.



$x = 0$: asymptote verticale

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f

1. Raisonnons par récurrence. Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ existe et vérifie $u_0 \geq 2$.

Supposons u_n défini et $u_n \geq 2$. Comme $u_n > 0$, $f(u_n)$ existe. La croissance de f donne

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq f(2) = (2 + \ln 2)e > 2,$$

car $\ln 2 > 0$ et $e > 1$. L'assertion est donc héréditaire. Tous les termes existent et sont au moins égaux à 2.

2. Pour $x \geq 2$, $\ln x \geq 0$ et $e^{x-1} \geq e$, donc

$$f(x) = (x + \ln x)e^{x-1} \geq ex.$$

À l'initialisation, $u_0 = 2 \geq 1 = e^0$. Si $u_n \geq e^n$, la question 1 assure aussi $u_n \geq 2$; l'inégalité précédente fournit

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq eu_n \geq e^{n+1}.$$

La récurrence établit $u_n \geq e^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $e^n \rightarrow +\infty$, la comparaison donne $u_n \rightarrow +\infty$.

3. Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel. Le langage est remplacé par Python et une précaution de calcul est explicitée, car les termes croissent très vite.

Pour $u \geq 2$, le nombre $u + \ln u$ est strictement positif et

$$\ln(f(u)) = u - 1 + \ln(u + \ln u).$$

On compare donc ce logarithme à $\ln(10^{20})$. Si le seuil est franchi, il suffit de mémoriser le seuil pour sortir de la boucle, sans calculer une exponentielle trop grande.

Python

```
import numpy as np

n = 0
u = 2.0
seuil = 10.0 ** 20
log_seuil = np.log(seuil)

while u < seuil:
    log_suivant = u - 1 + np.log(u + np.log(u))
    n = n + 1
    if log_suivant >= log_seuil:
        u = seuil
    else:
```

```
u = np.exp(log_suivant)

print(n)
```

Tant qu'aucun franchissement n'est détecté, u représente le terme de rang n . Lors d'un franchissement, on augmente n d'une unité et on termine immédiatement la boucle grâce à l'affectation $u = \text{seuil}$. Les termes antérieurs sont strictement sous le seuil ; le rang affiché est donc le plus petit rang convenable. La divergence établie en question 2 assure que ce rang existe.

Ce code a été exécuté : il affiche 3. Les calculs numériques donnent $u_1 \simeq 7,32$ et $u_2 \simeq 5,18 \times 10^3$; le logarithme de u_3 dépasse largement $20 \ln 10$. Ces valeurs illustrent le fonctionnement ; la justification de l'arrêt et du rang minimal repose sur les arguments précédents.

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f

1. La fonction f est continue sur $]0; +\infty[$. Le théorème fondamental de l'intégration montre que F y est une primitive de f , donc

$$F'(x) = f(x).$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, F' est de classe $\mathcal{C}^1$, et F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle. En particulier, $F''(x) = f'(x)$.

2. La dérivation par rapport à chaque coordonnée donne

$$G'_x(x, y) = f(x) - e^{\frac{x+y}{2}}, \quad G'_y(x, y) = f(y) - e^{\frac{x+y}{2}}.$$

Le facteur 2 du dernier terme de G compense le facteur $1/2$ venant de la dérivation de son exposant.

3. a. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, et ses limites aux deux extrémités sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$. Le théorème de la bijection montre donc que f est bijective de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

3. b. D'après la question 2, (x, y) est critique si et seulement si

$$f(x) = e^{\frac{x+y}{2}} \quad \text{et} \quad f(y) = e^{\frac{x+y}{2}}.$$

Ces égalités impliquent $f(x) = f(y)$; l'injectivité de f donne $x = y$. La première égalité devient alors

$$(x + \ln x)e^{x-1} = e^x.$$

Comme $e^{x-1} > 0$, elle équivaut à $x + \ln x = e$.

Réciproquement, si $x = y$ et $x + \ln x = e$, alors $f(x) = ee^{x-1} = e^x = e^{(x+y)/2} = f(y)$. Les deux dérivées partielles sont nulles. L'équivalence demandée est ainsi établie dans les deux sens.

4. Posons $k(x) = x + \ln x$. Sur $]0; +\infty[$, k est continue et sa dérivée vaut $1 + 1/x > 0$. Elle est donc strictement croissante. De plus,

$$k(1) = 1 < e, \quad k(e) = e + 1 > e.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires sur $[1; e]$ donne une solution $\alpha \in]1; e[$ à $k(x) = e$. La stricte croissance de k sur tout son domaine garantit l'unicité. Ainsi $1 < \alpha < e$, et le seul point critique de G est (α, α) .

5. Question adaptée au programme actuel. On utilise la hessienne et les signes de ses valeurs propres.

La fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0; +\infty[^2$, qui contient (α, α) . Pour tout (x, y)

de cet ouvert,

$$\nabla^2 G(x, y) = \begin{pmatrix} f'(x) - \frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} & -\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} \\ -\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} & f'(y) - \frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} \end{pmatrix}.$$

Au point critique, on obtient la matrice symétrique

$$\nabla^2 G(\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} f'(\alpha) - \frac{1}{2}e^\alpha & -\frac{1}{2}e^\alpha \\ -\frac{1}{2}e^\alpha & f'(\alpha) - \frac{1}{2}e^\alpha \end{pmatrix}.$$

Ses produits par les deux vecteurs indépendants $(1, 1)$ et $(1, -1)$ donnent respectivement les valeurs propres

$$\lambda_1 = f'(\alpha) - e^\alpha, \quad \lambda_2 = f'(\alpha).$$

L'égalité $\alpha + \ln \alpha = e$ entraîne

$$f'(\alpha) = \left(e + 1 + \frac{1}{\alpha}\right) e^{\alpha-1} = e^\alpha + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) e^{\alpha-1}.$$

Ainsi

$$\lambda_1 = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) e^{\alpha-1} > 0, \quad \lambda_2 = e^\alpha + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) e^{\alpha-1} > 0.$$

La condition suffisante par la hessienne s'applique : G admet en (α, α) un minimum local strict. La question ne demande pas de conclure à un minimum global.

Exercice 2

Partie I : Détermination d'une racine carrée de A

1. La matrice A est réelle et symétrique ; elle est donc diagonalisable d'après le résultat du programme. Ses deux premières lignes sont égales : ses lignes sont liées et elle n'est pas inversible.

Ses première et troisième lignes ne sont pas proportionnelles : leurs deux premiers coefficients sont identiques et non nuls, tandis que leurs troisièmes coefficients diffèrent. Elles sont donc indépendantes. Les trois lignes engendrent ainsi un espace de dimension 2, d'où $\text{rg}(A) = 2$.

2. On recherche directement les solutions de $AX = \lambda X$ pour les trois nombres proposés, sans déterminant.

Pour $\lambda = 0$, les équations sont $x + y + z = 0$ et $x + y + 3z = 0$. Leur différence donne $z = 0$, puis $y = -x$. Ainsi

$$E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Pour $\lambda = 1$, les deux premières équations donnent $y + z = 0$ et $x + z = 0$. La troisième est alors satisfaite. Par conséquent,

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Pour $\lambda = 4$, les deux premières équations sont $y + z = 3x$ et $x + z = 3y$. Leur soustraction donne $4(y - x) = 0$, donc $x = y$ puis $z = 2x$. La troisième équation $x + y + 3z = 4z$ est bien vérifiée. Ainsi

$$E_4(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Chacun de ces espaces contient un vecteur non nul : les trois nombres sont bien des valeurs propres. Les trois vecteurs obtenus, associés à des valeurs propres distinctes, sont indépendants ; ils forment donc une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, la matrice est diagonale de coefficients 0, 1, 4, ce qui prouve également qu'il n'existe aucune autre valeur propre.

3. En prenant comme colonnes les trois vecteurs précédents dans cet ordre, on obtient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

La liberté des colonnes assure l'inversibilité de P , et ses coefficients de première ligne valent tous 1. Les relations de vecteurs propres s'écrivent $AP = PD$. En multipliant à droite par P^{-1} , il vient $A = PDP^{-1}$, avec les coefficients diagonaux dans l'ordre croissant.

4. Pour calculer l'inverse, exprimons les coordonnées d'un vecteur (x, y, z) dans la base formée par les colonnes de P . L'égalité

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

équivalent au système $x = a + b + c$, $y = -a + b + c$, $z = -b + 2c$. En soustrayant les deux premières équations, $a = (x - y)/2$. Leur somme donne $b + c = (x + y)/2$, d'où

$$c = \frac{x + y + 2z}{6}, \quad b = \frac{x + y - z}{3}.$$

La matrice qui transforme (x, y, z) en (a, b, c) est donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

5. Pour une matrice diagonale, le carré s'obtient en élevant au carré chacun des coefficients diagonaux. Le choix

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

vérifie donc $\Delta^2 = D$ et respecte l'ordre croissant demandé. Cela établit l'existence d'une telle matrice; aucune unicité n'est demandée.

6. L'associativité et $P^{-1}P = I$ donnent

$$R^2 = (P\Delta P^{-1})(P\Delta P^{-1}) = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Pour calculer R , on a d'abord

$$P\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sa première ligne, multipliée par P^{-1} , vaut

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{6}, \frac{1}{3} + \frac{2}{6}, -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

La deuxième ligne donne le même résultat. La troisième fournit

$$\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{6}, -\frac{1}{3} + \frac{4}{6}, \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Ainsi

$$R = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Partie II : Étude d'endomorphismes

Les colonnes de P donnent les vecteurs de la base $\mathcal{C}$ exprimés dans $\mathcal{B}$: $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (1, 1, -1)$ et $u_3 = (1, 1, 2)$. Tous les raisonnements ci-dessous se font à partir des matrices de ces endomorphismes concrets.

1. La formule de changement de base donne

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1}AP = D, \quad \text{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = P^{-1}RP = \Delta.$$

2. a. Si $v = au_1 + bu_2 + cu_3$, la matrice D donne $f(v) = bu_2 + 4cu_3$. Puisque u_2, u_3 sont indépendants, $f(v) = 0$ équivaut à $b = c = 0$. Ainsi

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u_1), \quad \dim \text{Ker}(f) = 1.$$

Une base du noyau est donc $((1, -1, 0))$.

2. b. Méthode 1 — Matrice dans la base $\mathcal{C}$

La relation $f(au_1 + bu_2 + cu_3) = bu_2 + 4cu_3$ montre que toute image est dans $\text{Vect}(u_2, u_3)$. Réciproquement, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$,

$$su_2 + tu_3 = f\left(su_2 + \frac{t}{4}u_3\right).$$

On a donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(u_2, u_3)$. La famille (u_2, u_3) est libre et constitue une base de l'image, de dimension 2.

Méthode 2 — Colonnes de la matrice dans la base canonique

L'image est engendrée par les colonnes de A , donc par $v = (1, 1, 1)$ et $w = (1, 1, 3)$. Ces vecteurs sont indépendants, car $w = \lambda v$ imposerait simultanément $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$. Ils forment une autre base de l'image, qui est donc de dimension 2.

Les deux descriptions concordent : $u_2 = 2v - w$ et $u_3 = (v + w)/2$, tandis que $v = (u_2 + 2u_3)/3$ et $w = (-u_2 + 4u_3)/3$. La première méthode exploite la diagonalisation déjà effectuée ; la seconde permet de lire l'image directement sur la matrice initiale.

3. a. La matrice Δ donne $g(au_1 + bu_2 + cu_3) = bu_2 + 2cu_3$. L'indépendance de u_2, u_3 montre que ce vecteur est nul si et seulement si $b = c = 0$. Par conséquent,

$$\text{Ker}(g) = \text{Vect}(u_1), \quad \dim \text{Ker}(g) = 1.$$

Une base du noyau est $((1, -1, 0))$.

3. b. La même expression montre que $\text{Im}(g) \subset \text{Vect}(u_2, u_3)$. Pour tout $s, t \in \mathbb{R}$,

$$su_2 + tu_3 = g\left(su_2 + \frac{t}{2}u_3\right).$$

L'inclusion réciproque est donc acquise. Ainsi $\text{Im}(g) = \text{Vect}(u_2, u_3)$; une base est $((1, 1, -1), (1, 1, 2))$, et sa dimension vaut 2.

4. La condition $g = f \circ h$ se traduit dans la base $\mathcal{C}$ par $\Delta = DH$. On peut choisir

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

En effet, le produit diagonal DH vaut $\text{diag}(0, 1, 2) = \Delta$. De plus, H est inversible, d'inverse $\text{diag}(1, 1, 2)$: l'endomorphisme h de matrice H dans $\mathcal{C}$ est bien un automorphisme.

Sa matrice dans la base canonique est donnée par le changement de base

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = PHP^{-1}.$$

Si on développe ce produit, on obtient

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} \frac{11}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} & \frac{11}{12} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

La relation $DH = \Delta$ suffit à assurer $f \circ h = g$ dans toutes les bases.

Exercice 3

Partie I : Différence de deux variables aléatoires

1. Pour chaque joueur, l'événement « atteindre la cible au premier tir » a la probabilité p . Ces événements sont indépendants pour les n joueurs, puisque tous les tirs sont indépendants. Le nombre X de succès vérifie donc

$$X \sim \mathcal{B}(n, p), \quad E(X) = np, \quad \mathbb{V}(X) = np(1 - p) = npq.$$

En particulier, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$.

2. Pour un joueur, l'événement complémentaire de « toucher au moins une fois » est « manquer les deux tirs ». Par indépendance des deux tirs, sa probabilité vaut q^2 . La probabilité d'au moins un succès est donc $1 - q^2 = p(1 + q)$.

Les couples de tirs de joueurs différents sont indépendants, donc leurs indicatrices de succès au moins une fois sont indépendantes, par le lemme des coalitions. Par conséquent,

$$Z \sim \mathcal{B}(n, 1 - q^2), \quad E(Z) = n(1 - q^2), \quad \mathbb{V}(Z) = n(1 - q^2)q^2.$$

3. Tout joueur compté dans X est aussi compté dans Z . La différence $Y = Z - X$ compte donc exactement les joueurs ayant manqué leur premier tir et réussi leur second tir.

Pour un joueur, cette succession a la probabilité qp par indépendance des deux tirs. Les successions de joueurs différents sont indépendantes. Ainsi

$$Y \sim \mathcal{B}(n, pq).$$

On utilisera aussi $E(Y) = npq$ et $\mathbb{V}(Y) = npq(1 - pq)$. Toutes les variables de cette partie sont bornées entre 0 et n , donc leurs moments utilisés existent.

4. a. L'événement $X = n$ signifie que tous les joueurs ont réussi dès le premier tir. Aucun ne peut alors être compté dans Y , d'où

$$P(X = n, Y = n) = 0,$$

car $n \geq 1$. Or les lois précédentes donnent $P(X = n) = p^n > 0$ et $P(Y = n) = (pq)^n > 0$. Le produit de ces deux probabilités est strictement positif et diffère de la probabilité conjointe. Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.

4. b. Méthode 1 — Variance de la somme

Comme $Z = X + Y$ et que les moments d'ordre 2 existent,

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2} (\mathbb{V}(Z) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)).$$

En remplaçant par les valeurs précédentes et en utilisant $1 - q^2 = p(1 + q)$,

$$2 \text{Cov}(X, Y) = npq (q(1 + q) - 1 - (1 - pq)).$$

Le facteur entre parenthèses vaut

$$q + q^2 - 2 + pq = q + q(q + p) - 2 = 2q - 2 = -2p,$$

car $p + q = 1$. On en déduit

$$\text{Cov}(X, Y) = -np^2q.$$

Méthode 2 — Indicatrices par joueur

Notons A_j l'indicatrice du succès au premier tir du joueur j , et B_j l'indicatrice de son échec au premier tir suivi d'un succès au second. Alors

$$X = \sum_{j=1}^n A_j$$

et

$$Y = \sum_{j=1}^n B_j.$$

Pour un même joueur, $A_j B_j = 0$, les deux situations étant incompatibles. Comme $E(A_j) = p$ et $E(B_j) = pq$, la formule de Koenig-Huygens donne

$$\text{Cov}(A_j, B_j) = 0 - p(pq) = -p^2q.$$

Pour $j \neq k$, A_j et B_k dépendent de tirs de joueurs différents ; ils sont indépendants et leur covariance est nulle. La bilinéarité de la covariance donne donc

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \text{Cov}(A_j, B_k) = \sum_{j=1}^n (-p^2q) = -np^2q.$$

La première méthode est rapide lorsque les trois lois sont connues ; la seconde explique directement l'origine de la covariance négative, due aux deux situations incompatibles pour chaque joueur.

Partie II : Variable aléatoire à densité conditionnée par une variable aléatoire discrète

1. La variable U prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \geq 1, \quad P(U = n) = pq^{n-1}.$$

Puisque $p \in]0; 1[$ et $q = 1 - p \in]0; 1[$, il s'agit de la loi géométrique du programme, avec

$$E(U) = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{V}(U) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Toutes les probabilités $P(U = n)$ sont strictement positives : les conditionnements de l'énoncé sont donc définis.

2. a. Les événements $(U = n)$, pour $n \geq 1$, forment un système complet dénombrable. Pour $t \geq 0$, la formule des probabilités totales donne

$$P(T > t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(U = n) P_{(U=n)}(T > t) = \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1} e^{-nt}.$$

En posant $k = n - 1$, cette somme devient

$$pe^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} (qe^{-t})^k.$$

La raison est comprise entre 0 et $q < 1$: la série géométrique converge. Sa somme vaut donc

$$P(T > t) = \frac{pe^{-t}}{1 - qe^{-t}}.$$

2. b. En prenant $t = 0$ dans le résultat précédent, $P(T > 0) = p/(1 - q) = 1$. Pour $t < 0$, l'événement $(T \leq t)$ est contenu dans $(T \leq 0)$, de probabilité nulle. Ainsi $F_T(t) = 0$ pour $t < 0$.

Pour $t \geq 0$, la relation $F_T(t) = 1 - P(T > t)$ donne

$$F_T(t) = 1 - \frac{pe^{-t}}{1 - qe^{-t}} = \frac{1 - e^{-t}}{1 - qe^{-t}}.$$

Finalement,

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{1 - e^{-t}}{1 - qe^{-t}} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Le dénominateur est au moins égal à $1 - q = p > 0$ sur $[0; +\infty[$; toutes ces expressions sont donc définies.

2. c. La fonction de répartition est continue sur chaque côté de 0, et

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-t}}{1 - qe^{-t}} = \frac{0}{1 - q} = 0 = F_T(0).$$

Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour $t > 0$, la dérivation du quotient donne

$$F'_T(t) = \frac{e^{-t}(1 - qe^{-t}) - qe^{-t}(1 - e^{-t})}{(1 - qe^{-t})^2} = \frac{pe^{-t}}{(1 - qe^{-t})^2}.$$

Ainsi T est une variable à densité; on peut choisir

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \frac{pe^{-t}}{(1 - qe^{-t})^2} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Cette fonction est positive et coïncide avec F'_T partout sauf éventuellement en 0. Sa limite à gauche de 0 vaut 0 et sa limite à droite vaut $p/(1 - q)^2 = 1/p$, qui est finie. Elle appartient donc bien au cadre des densités du programme. La valeur choisie en 0 est sans effet sur la loi.

3. On pose désormais $Z = UT$, avec la notation propre à cette partie indépendante de la partie I.

3. a. Fixons $n \geq 1$ et $z \geq 0$. Sur l'événement $(U = n)$, $Z = nT$, donc

$$P_{(U=n)}(Z > z) = P_{(U=n)}\left(T > \frac{z}{n}\right).$$

Le nombre z/n est positif ou nul, et l'hypothèse conditionnelle de l'énoncé s'applique :

$$P_{(U=n)}(Z > z) = e^{-n(z/n)} = e^{-z}.$$

3. b. Pour $z \geq 0$, les probabilités totales et la question 3.a donnent

$$P(Z > z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(U = n)e^{-z} = e^{-z} \sum_{n=1}^{\infty} P(U = n) = e^{-z}.$$

De plus, $T > 0$ presque sûrement et $U \geq 1$, donc $Z > 0$ presque sûrement. Par conséquent, pour tout réel z ,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0, \\ 1 - e^{-z} & \text{si } z \geq 0. \end{cases}$$

C'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi $Z \sim \mathcal{E}(1)$.

3. c. Pour $n \geq 1$ et $z \geq 0$, la formule des probabilités composées est applicable puisque $P(U = n) > 0$. Elle donne

$$P(U = n, Z > z) = P(U = n)P_{(U=n)}(Z > z) = P(U = n)e^{-z}.$$

Or $e^{-z} = P(Z > z)$ d'après 3.b. On obtient donc exactement

$$P(U = n, Z > z) = P(U = n)P(Z > z).$$

Relevé des adaptations

Exercice 1, partie II, question 3 : Code adapté en Python. La demande de programmation est transposée en Python ; la documentation des commandes nécessaires et une précaution contre le dépassement de capacité sont ajoutées, sans changer le rang recherché.

Exercice 1, partie III, préambule et question 5 : la nature ouverte du domaine est précisée ; la question demande explicitement le calcul de la hessienne et l'étude des signes de ses valeurs propres, conformément à la méthode actuelle.