



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2010

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.

On note :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer les produits AFA , AGA , AHA .
2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.

On note u l'application qui, à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.

3. a. Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_2, u(S) \in \mathcal{S}_2$.
3. b. Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.
3. c. Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de $\mathcal{S}_2$.

Partie II : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $-4, 1, 16$ sont valeurs propres de M et déterminer, pour chacune de celles-ci, une base du sous-espace propre associé. Est-ce que M est diagonalisable ?
2. Déterminer une matrice P carrée d'ordre 3, inversible, de première ligne égale à $(4 \ 4 \ 1)$, telle que $M = PDP^{-1}$.
3. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.
4. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.
5. Établir : $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, où e désigne l'application identité de $\mathcal{S}_2$ et où u a été définie dans la partie I.

Exercice 2

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2),$$

et C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On donne la valeur approchée : $\ln 2 \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de C

1. a. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.
1. b. En déduire le sens de variation de f .
1. c. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
3. Déterminer la nature des branches infinies de C . Pour cela, calculer, en chacun des deux infinis, les limites de $f(x)/x$ et de $f(x) - x$. On dit ici qu'une branche a la direction de la droite $y = x$ lorsque $f(x)/x \rightarrow 1$; une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote lorsque $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$.
4. Montrer que C admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
5. Tracer C . On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à C à l'origine et en chacun des points d'inflexion.
6. Calculer $\int_0^1 x f(x) dx$. À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
2. Établir que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.
3. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leq 10^{-3}$.
On pourra utiliser `np.log(t)`, qui calcule le logarithme népérien de $t > 0$, après
`l'import import numpy as np`.
4. a. Établir : $\forall x \in [0; 1], \quad f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.
4. b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.
4. c. Démontrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} u_n^2$$

converge.

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles associée à f

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y).$$

Le domaine $\mathbb{R}^2$ est ouvert.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les dérivées partielles premières de F en (x, y) à l'aide de f' , x et y .

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} f'(x) = f'(y), \\ f'(x+y) = f'(x). \end{cases}$ En déduire les points critiques de F .

3. Est-ce que F admet un minimum local ?

Exercice 3

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre $p, p \in]0; 1[$, et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ». Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $(\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2))$.

On se propose de calculer la probabilité de A .

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $E(X_1)$ et sa variance $V(X_1)$.

On définit la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.

2. Calculer la probabilité $P(\Delta = 0)$.
3. Soit n un entier naturel non nul.

3. a. Justifier :

$$P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = n + k).$$

3. b. En déduire : $P(\Delta = n) = \frac{2pq^n}{1+q}$.

4. a. Montrer que Δ admet une espérance $E(\Delta)$ et la calculer.

4. b. Montrer : $E((X_1 - X_2)^2) = 2V(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $V(\Delta)$ et la calculer.

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $(X_3 > \Delta)$.

6. a. En déduire :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k)P(X_3 > k).$$

6. b. Exprimer $P(A)$ à l'aide de p et q .

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p , $p \in]0; 1[$, et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ , $\lambda \in]0; +\infty[$. On note $q = 1 - p$.

On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0; +\infty[, \quad P((X = k) \cap (Y \leq t)) = P(X = k)P(Y \leq t).$$

1. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

2. On définit la variable aléatoire Z par $Z = \frac{Y}{X}$.

2. a. Montrer :

$$\forall t \in [0; +\infty[, \quad P(Z \geq t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y \geq kt).$$

2. b. En déduire : $\forall t \in [0; +\infty[, \quad P(Z \geq t) = \frac{pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}}.$

2. c. Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z .