



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2010

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2

1. Les produits s'obtiennent en multipliant d'abord à gauche par A , puis à droite par A :

$$AF = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad AG = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad AH = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4H,$$

$$AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = 4G + 12H,$$

$$AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = 4F + 6G + 9H.$$

2. La matrice nulle est symétrique. Si S et T sont symétriques et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors ${}^t(\alpha S + \beta T) = \alpha {}^t S + \beta {}^t T = \alpha S + \beta T$. L'ensemble $\mathcal{S}_2$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Toute matrice de $\mathcal{S}_2$ s'écrit de manière unique

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = aF + bG + cH.$$

Cette écriture prouve à la fois que (F, G, H) est génératrice et qu'elle est libre : $aF + bG + cH = 0$ impose $a = b = c = 0$ par identification des coefficients. C'est donc une base et $\dim \mathcal{S}_2 = 3$.

3. a. On utilise la transposition d'un produit. Comme A et S sont symétriques,

$${}^t(ASA) = {}^tA {}^tS {}^tA = ASA.$$

Le produit ASA est une matrice carrée d'ordre 2, symétrique ; ainsi $u(S) \in \mathcal{S}_2$.

3. b. Pour $S, T \in \mathcal{S}_2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la distributivité du produit matriciel donne

$$u(\alpha S + \beta T) = A(\alpha S + \beta T)A = \alpha ASA + \beta ATA = \alpha u(S) + \beta u(T).$$

L'application u est linéaire et, d'après 3.a, elle envoie $\mathcal{S}_2$ dans lui-même. C'est donc un endomorphisme de cet espace concret.

3. c. Les colonnes de la matrice cherchée sont les coordonnées de $u(F)$, $u(G)$, $u(H)$ dans la base (F, G, H) . La question 1 donne

$$\text{Mat}_{(F,G,H)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix} = M.$$

Partie II : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

1. Pour chacune des trois valeurs proposées, on résout le système associé, sans calculer de déterminant.

Pour $\lambda = -4$, les deux premières lignes de $(M + 4I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$ donnent $a = -c$ et

$b = -3c/4$. La troisième ligne est alors satisfaite, puisque $4a + 12b + 13c = -4c - 9c + 13c = 0$. Ainsi

$$E_{-4}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right).$$

Pour $\lambda = 1$, les deux premières lignes de $(M - I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$ donnent $a = 4c$ et $b = -2c$.

La troisième ligne est satisfaite : $4a + 12b + 8c = 16c - 24c + 8c = 0$. Ainsi

$$E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Pour $\lambda = 16$, les deux premières lignes de $(M - 16I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$ donnent $c = 4a$ et

$b = c/2 = 2a$. La troisième ligne est satisfaite : $4a + 12b - 7c = 4a + 24a - 28a = 0$. Ainsi

$$E_{16}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

Chacun des trois vecteurs affichés est non nul. Les trois valeurs proposées sont donc bien propres. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont libres ; ces trois vecteurs forment donc une base de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent M est diagonalisable, et son spectre est exactement $\{-4, 1, 16\}$.

2. On place dans les colonnes de P les vecteurs propres de la question 1, dans l'ordre des coefficients diagonaux de D :

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ses colonnes forment une base, donc P est inversible. Sa première ligne est bien $(4 \ 4 \ 1)$. Les relations propres donnent $MP = PD$, d'où, en multipliant à droite par P^{-1} ,

$$M = PDP^{-1}.$$

3. Les trois facteurs sont diagonaux. Leur produit est diagonal, avec coefficients

$$(-4 + 4)(-4 - 1)(-4 - 16) = 0,$$

$$(1 + 4)(1 - 1)(1 - 16) = 0,$$

$$(16 + 4)(16 - 1)(16 - 16) = 0.$$

Ainsi $(D + 4I)(D - I)(D - 16I) = 0$.

4. Pour $a \in \mathbb{R}$, la relation $M = PDP^{-1}$ entraîne $M - aI = P(D - aI)P^{-1}$. Les facteurs $P^{-1}P$ se simplifient dans le produit, donc

$$(M + 4I)(M - I)(M - 16I) = P(D + 4I)(D - I)(D - 16I)P^{-1} = 0.$$

En développant les produits de polynômes en une même matrice,

$$(M + 4I)(M - I) = M^2 + 3M - 4I,$$

$$(M^2 + 3M - 4I)(M - 16I) = M^3 - 13M^2 - 52M + 64I.$$

On en déduit $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

5. On revient à la matrice de l'endomorphisme dans la base (F, G, H) . Pour

$S = aF + bG + cH$, notons $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sa colonne de coordonnées. Les colonnes de coordonnées de $u(S)$, $u^2(S)$ et $u^3(S)$ sont respectivement MX , M^2X et M^3X .

La relation précédente donne $M^3X = 13M^2X + 52MX - 64X$. L'unicité des coordonnées implique donc, pour tout $S \in \mathcal{S}_2$,

$$u^3(S) = 13u^2(S) + 52u(S) - 64S.$$

L'identité demandée est ainsi $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$.

Exercice 2

Partie I : Étude de f et tracé de C

1. a. Comme $1 + x^2 > 0$ pour tout réel x , la dérivation de la composée logarithme donne

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$

1. b. Le dénominateur est strictement positif, donc $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, avec égalité uniquement en $x = 1$. La fonction est strictement croissante sur $] -\infty; 1]$ et sur $[1; +\infty[$, car sa dérivée est strictement positive à l'intérieur de chacun de ces intervalles. Ces deux conclusions donnent la stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$.

1. c. On dérive la première expression de f' :

$$f''(x) = -\frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}.$$

2. Lorsque $x \rightarrow -\infty$, on a $\ln(1 + x^2) \geq 0$, donc $f(x) \leq x$ et $f(x) \rightarrow -\infty$.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, l'identité

$$\ln(1 + x^2) = 2 \ln x + \ln(1 + x^{-2})$$

et les croissances comparées donnent $\ln(1 + x^2)/x \rightarrow 0$. Ainsi $f(x)/x \rightarrow 1$, puis $f(x) \rightarrow +\infty$.

3. Question adaptée au programme actuel : les limites à étudier et le vocabulaire géométrique utile sont précisés dans le sujet.

Pour $x \neq 0$, on peut écrire $\ln(1 + x^2) = 2 \ln |x| + \ln(1 + x^{-2})$. Aux deux infinis, $\ln |x|/|x| \rightarrow 0$ et $\ln(1 + x^{-2}) \rightarrow 0$. Par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

D'autre part,

$$f(x) - x = -\ln(1 + x^2) \longrightarrow -\infty \quad (x \rightarrow \pm\infty).$$

Aux deux infinis, C possède donc une branche de direction $y = x$, située sous cette droite. Il n'existe aucune asymptote oblique : si $y = ax + b$ était asymptote, la première limite imposerait $a = 1$, mais $f(x) - x$ ne tend vers aucune constante finie. Ces branches sont aussi appelées branches paraboliques de direction $y = x$; seul le comportement décrit par les deux limites est nécessaire ici.

4. Le dénominateur de f'' est strictement positif. Son signe est celui de $(x - 1)(x + 1)$: positif sur $] -\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$, négatif sur $] -1; 1[$. La convexité change donc en $x = -1$ et en $x = 1$, et en ces deux points seulement. Les deux points d'inflexion sont

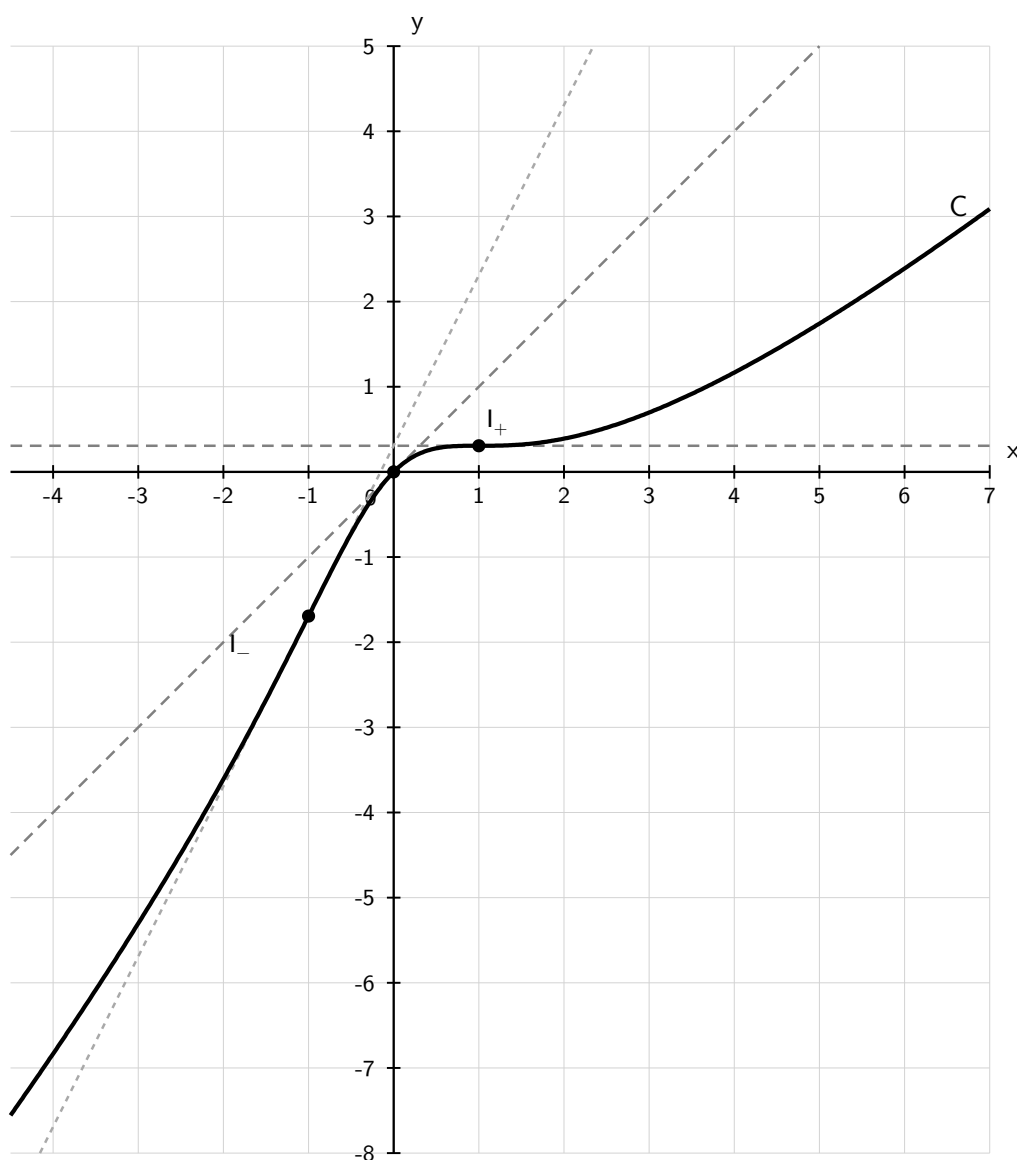
$$I_- = (-1, -1 - \ln 2), \quad I_+ = (1, 1 - \ln 2).$$

5. La tangente en un point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. On utilise les valeurs

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f'(-1) = 2, \quad f'(1) = 0.$$

La tangente à l'origine est donc $y = x$, celle en I_- est $y = 2x + 1 - \ln 2$, et celle en I_+ est $y = 1 - \ln 2$. Les points d'inflexion ont pour ordonnées approchées $-1,69$ et $0,31$.

Le tracé suivant respecte l'orthonormalité ; sur papier, une unité sur chaque axe correspond aux 2 centimètres demandés.



Même échelle sur les deux axes ; les traits interrompus sont les tangentes.

La courbe reste sous la tangente $y = x$, car $f(x) - x = -\ln(1 + x^2) \leq 0$, avec égalité uniquement en 0. Le point I_+ est un point d'inflexion à tangente horizontale, et non un extremum, puisque f reste strictement croissante.

6. L'intégrande est continu sur $[0; 1]$, donc l'intégrale existe. Par linéarité,

$$\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x \ln(1 + x^2) dx.$$

Le changement indiqué $t = 1 + x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant sur $[0; 1]$; il

transforme les bornes en 1 et 2, avec $dt = 2x \, dx$. Ainsi

$$\int_0^1 x \ln(1+x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln t \, dt = \frac{1}{2} [t \ln t - t]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Finalement,

$$\int_0^1 x f(x) \, dx = \frac{1}{3} - \ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \ln 2.$$

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

1. Pour tout réel x , on a $\ln(1+x^2) \geq 0$, donc $f(x) \leq x$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n.$$

La suite est donc décroissante.

2. La croissance de f et $f(0) = 0$ donnent $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. Une récurrence à partir de $u_0 = 1$ montre donc que $u_n \geq 0$ pour tout n . Avec la question 1, cela donne $0 \leq u_n \leq 1$.

La suite est décroissante et minorée, donc elle converge vers un réel $\ell \in [0; 1]$. Par continuité de f ,

$$\ell = f(\ell) = \ell - \ln(1 + \ell^2).$$

Ainsi $\ln(1 + \ell^2) = 0$, donc $1 + \ell^2 = 1$ et $\ell = 0$. La suite converge vers 0. De plus, $f(x) > 0$ pour $x > 0$, par stricte croissance; tous les termes sont donc strictement positifs.

3. Code adapté en Python.

Python

```
import numpy as np

n = 0
u = 1.0
while u > 1e-3:
    u = u - np.log(1 + u**2)
    n = n + 1
print(n)
```

Au début de chaque test de la boucle, u représente u_n et n son indice. Chaque passage calcule le terme suivant puis augmente l'indice de 1. La limite $u_n \rightarrow 0$ garantit qu'un terme finit par être inférieur ou égal à 10^{-3} , donc la boucle s'arrête en arithmétique exacte. Le test porte bien sur une inégalité stricte, car on veut s'arrêter dès que l'inégalité large demandée est satisfaite.

Le code a été exécuté : il affiche 993. Le calcul numérique donne $u_{992} \approx 0,00100000505$ et $u_{993} \approx 0,00099900504$. Ces valeurs illustrent le résultat ; la justification de la terminaison repose sur la convergence démontrée, non sur l'exécution.

4. a. Méthode 1 — Étude d'une fonction auxiliaire

Pour $t \in [0; 1]$, posons $h(t) = \ln(1 + t) - t/2$. On a $h(0) = 0$ et

$$h'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2} = \frac{1-t}{2(1+t)} \geq 0.$$

Il en résulte $\ln(1 + t) \geq t/2$ sur $[0; 1]$. En choisissant $t = x^2$, avec $x \in [0; 1]$, on obtient

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2) \leq x - \frac{1}{2}x^2.$$

Méthode 2 — Minoration d'une intégrale

Pour $t \in [0; 1]$, on a $1/(1+s) \geq 1/2$ pour tout $s \in [0; t]$. En intégrant cette inégalité sur le segment $[0; t]$,

$$\ln(1+t) = \int_0^t \frac{ds}{1+s} \geq \int_0^t \frac{1}{2} ds = \frac{t}{2}.$$

L'application à $t = x^2$ donne de nouveau l'inégalité demandée. La première méthode transforme l'inégalité en une étude de variations ; la seconde utilise directement une borne de l'intégrande.

4. b. Comme $u_n \in [0; 1]$, la question précédente s'applique à $x = u_n$:

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n - \frac{1}{2}u_n^2.$$

En réarrangeant cette inégalité, on obtient bien $u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. c. Notons

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n^2.$$

Les termes sont positifs, donc (S_N) est croissante. Par la question 4.b et télescopage,

$$0 \leq S_N \leq 2 \sum_{n=0}^N (u_n - u_{n+1}) = 2(u_0 - u_{N+1}) = 2(1 - u_{N+1}) \leq 2.$$

Les sommes partielles sont croissantes et majorées, donc elles convergent. La série

$$\sum_{n \geq 0} u_n^2$$

converge, avec une somme inférieure ou égale à 2.

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles associée à f

1. Question adaptée au programme actuel : la nature ouverte du domaine est précisée dans le préambule, sans modifier la demande mathématique.

Le domaine $\mathbb{R}^2$ est ouvert. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et les applications $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$. Par composition et différence, F est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et en particulier de classe $\mathcal{C}^1$.

La dérivation par rapport à chaque variable donne

$$\partial_1 F(x, y) = f'(x + y) - f'(x), \quad \partial_2 F(x, y) = f'(x + y) - f'(y).$$

2. Pour deux réels s, t , les dénominateurs $1 + s^2$ et $1 + t^2$ étant strictement positifs,

$$f'(s) = f'(t) \iff \frac{s}{1 + s^2} = \frac{t}{1 + t^2} \iff (s - t)(1 - st) = 0.$$

Le système de l'énoncé équivaut donc à

$$\begin{cases} (x - y)(1 - xy) = 0, \\ y(1 - x(x + y)) = 0. \end{cases}$$

Si $y = 0$, la première égalité impose $x = 0$.

Si $y \neq 0$, la seconde impose $x(x + y) = 1$. Dans la première égalité, le cas $xy = 1$ donnerait $x^2 + xy = 1$, donc $x^2 = 0$, incompatible avec $xy = 1$. On a donc $x = y$, puis $2x^2 = 1$. On obtient les deux solutions $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Réciproquement, chacune de ces trois paires vérifie les deux égalités. D'après les expressions du gradient, ses zéros sont précisément les solutions du système. Les points critiques de F sont donc

$$(0, 0), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

3. Méthode 1 — Hessienne et signes de ses valeurs propres

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Sa hessienne est

$$\nabla^2 F(x, y) = \begin{pmatrix} f''(x+y) - f''(x) & f''(x+y) \\ f''(x+y) & f''(x+y) - f''(y) \end{pmatrix}.$$

À l'origine, $f''(0) = -2$, d'où

$$\nabla^2 F(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre pour -2 , et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est propre pour 2 . Ils forment une base ;

ces deux valeurs propres sont de signes opposés. Ainsi $(0, 0)$ est un point selle et n'est pas un minimum local.

Posons maintenant $a = 1/\sqrt{2}$ ou $a = -1/\sqrt{2}$. Comme $a^2 = 1/2$, on a

$$f''(a) = \frac{2(1/2 - 1)}{(1 + 1/2)^2} = -\frac{4}{9}, \quad f''(2a) = \frac{2(2 - 1)}{(1 + 2)^2} = \frac{2}{9}.$$

Il en résulte

$$\nabla^2 F(a, a) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/9 \\ 2/9 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont respectivement propres pour $8/9$ et $4/9$. Ces deux valeurs propres sont strictement positives. Le critère de la hessienne assure donc que F admet un minimum local strict en chacun des points (a, a) .

En ces points, $1 + a^2 = 3/2$ et $1 + (2a)^2 = 3$, donc

$$F(a, a) = \ln \left(\frac{(1 + a^2)^2}{1 + 4a^2} \right) = \ln \left(\frac{3}{4} \right).$$

La condition nécessaire d'extremum local assure qu'il n'existe pas d'autre minimum local, puisque tous les points critiques ont été examinés.

Méthode 2 — Identité algébrique et minimum global

Les termes linéaires se simplifient dans la définition de F , ce qui donne, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = \ln \left(\frac{(1 + x^2)(1 + y^2)}{1 + (x + y)^2} \right).$$

Un développement direct fournit l'identité

$$4(1+x^2)(1+y^2) - 3(1+(x+y)^2) = (x-y)^2 + (2xy-1)^2 \geq 0.$$

Le dénominateur $1+(x+y)^2$ étant positif, le quotient dans le logarithme est au moins $3/4$. Par croissance du logarithme, $F(x,y) \geq \ln(3/4)$ sur tout $\mathbb{R}^2$.

L'égalité a lieu exactement lorsque $x=y$ et $2xy=1$, donc exactement aux deux points $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Chacun est isolé de l'autre, et l'inégalité est stricte en tous les autres points; chacun est donc aussi un minimum local strict. Cette seconde méthode montre de plus que leur valeur commune est le minimum global de F , tandis que la première permet de classer également le point critique $(0,0)$.

Exercice 3

Partie I

1. La loi géométrique est ici portée par $\mathbb{N}^*$:

$$\forall k \geq 1, \quad P(X_1 = k) = pq^{k-1}, \quad q = 1 - p \in]0; 1[.$$

Ses moments usuels sont finis et valent

$$E(X_1) = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{V}(X_1) = \frac{q}{p^2}.$$

2. L'événement $(\Delta = 0)$ est l'union disjointe des événements $(X_1 = k) \cap (X_2 = k)$, pour $k \geq 1$. Par indépendance puis par sommation d'une série géométrique de raison $q^2 \in]0; 1[$,

$$P(\Delta = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q},$$

puisque $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(1 + q)$.

3. Dans cette question, n est un entier fixé supérieur ou égal à 1.

3. a. Les événements $(X_2 = k)$, $k \geq 1$, forment un système complet. De plus,

$$(X_1 - X_2 = n) \cap (X_2 = k) = (X_1 = n + k) \cap (X_2 = k).$$

Par les probabilités totales et l'indépendance de X_1 et X_2 ,

$$P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = n + k).$$

3. b. En remplaçant chaque probabilité par sa valeur,

$$P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{k-1+n+k-1} = p^2 q^n \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2} = \frac{pq^n}{1+q}.$$

Les variables X_1 et X_2 sont indépendantes de même loi, donc leur loi jointe est inchangée quand on échange leurs rôles. Il en résulte

$P(X_2 - X_1 = n) = P(X_1 - X_2 = n)$. Pour $n \geq 1$, les événements $(X_1 - X_2 = n)$ et $(X_2 - X_1 = n)$ sont disjoints et leur union est $(\Delta = n)$. Ainsi

$$P(\Delta = n) = \frac{2pq^n}{1+q}.$$

La loi est bien normalisée : sa somme vaut

$$p/(1+q) + 2pq/((1+q)(1-q)) = (p+2q)/(1+q) = 1.$$

4. a. Méthode 1 — Calcul à partir de la loi

La variable Δ est positive. La série qui définit son espérance est donc à termes positifs.

La série géométrique dérivée converge puisque $0 < q < 1$, avec

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = 1/(1-q)^2.$$

Par conséquent

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nP(\Delta = n) = \frac{2p}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{2p}{1+q} \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{2q}{p(1+q)} < +\infty.$$

L'espérance existe donc et vaut $E(\Delta) = 2q/(p(1+q))$.

Méthode 2 — Durée minimale et linéarité

Posons $L = \min(X_1, X_2)$. Pour tout entier $k \geq 1$, l'indépendance donne

$$P(L \geq k) = P(X_1 \geq k)P(X_2 \geq k) = q^{2k-2}.$$

Ainsi $P(L = k) = q^{2k-2} - q^{2k} = (1 - q^2)(q^2)^{k-1}$: L suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2 = p/(1+q)$, et $E(L) = 1/(p(1+q))$.

L'identité $|X_1 - X_2| = X_1 + X_2 - 2 \min(X_1, X_2)$ donne une combinaison de variables d'espérances finies. On peut donc appliquer la linéarité :

$$E(\Delta) = \frac{2}{p} - \frac{2}{p(1+q)} = \frac{2q}{p(1+q)}.$$

La première méthode exploite la loi déjà calculée ; la seconde rattache l'écart entre les durées à la première libération d'un guichet.

4. b. Les lois géométriques ont un moment d'ordre deux fini. Comme

$(X_1 - X_2)^2 \leq 2X_1^2 + 2X_2^2$, ce carré admet une espérance finie. L'indépendance donne $E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2)$; le produit est intégrable, par exemple parce que $2|X_1 X_2| \leq X_1^2 + X_2^2$. En développant,

$$E((X_1 - X_2)^2) = E(X_1^2) + E(X_2^2) - 2E(X_1)E(X_2).$$

Les deux variables ont la même loi, d'où

$$E((X_1 - X_2)^2) = 2(E(X_1^2) - E(X_1)^2) = 2V(X_1) = \frac{2q}{p^2}.$$

Or $\Delta^2 = (X_1 - X_2)^2$. La variable Δ admet donc un moment d'ordre deux fini, et par conséquent une variance. La formule de Kœnig-Huygens donne

$$V(\Delta) = \frac{2q}{p^2} - \left(\frac{2q}{p(1+q)} \right)^2 = \frac{2q((1+q)^2 - 2q)}{p^2(1+q)^2} = \frac{2q(1+q^2)}{p^2(1+q)^2}.$$

5. Pour tous réels a, b , on a $\max(a, b) - \min(a, b) = |a - b|$. En soustrayant $\min(X_1, X_2)$ dans l'inégalité qui définit A ,

$$A = (X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)) = (X_3 > \Delta).$$

L'inégalité reste stricte : une fin simultanée avec un autre client n'appartient pas à l'événement A tel qu'il est défini dans l'énoncé.

6. a. Comme X_1, X_2, X_3 sont mutuellement indépendantes, le lemme des coalitions assure l'indépendance de $\Delta = |X_1 - X_2|$ et de X_3 . Les événements $(\Delta = k), k \geq 0$, forment un système complet. Ainsi

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((\Delta = k) \cap (X_3 > k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k)P(X_3 > k).$$

6. b. Pour tout entier $k \geq 0$, la loi géométrique donne

$$P(X_3 > k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} pq^{j-1} = q^k.$$

En séparant le terme $k = 0$ puis en utilisant la loi de Δ ,

$$P(A) = \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q} \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k} = \frac{p}{1+q} \left(1 + \frac{2q^2}{1-q^2} \right).$$

Par simplification avec $1 - q^2 = p(1 + q)$,

$$P(A) = \frac{p(1+q^2)}{(1+q)(1-q^2)} = \frac{1+q^2}{(1+q)^2}.$$

Partie II

1. Une densité de Y est donnée par

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Les moments usuels de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sont

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{V}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

En particulier, $P(Y \geq s) = e^{-\lambda s}$ pour $s \geq 0$, et $P(Y = s) = 0$ pour tout réel s .

2. Comme X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, la division par X est toujours définie. De plus, $Y \geq 0$ presque sûrement, donc $Z = Y/X \geq 0$ presque sûrement.

2. a. Fixons $t \geq 0$. Sur l'événement $(X = k)$, où $k \geq 1$, l'inégalité $Y/X \geq t$ équivaut à $Y \geq kt$. Le système complet des événements $(X = k)$ donne donc

$$P(Z \geq t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y \geq kt)).$$

L'indépendance de X et de Y permet de factoriser chacun des termes. Elle est énoncée dans le sujet avec des inégalités larges vers la gauche; elle vaut aussi pour les inégalités vers la droite, en passant au complémentaire et en utilisant $P(Y = kt) = 0$. Ainsi

$$P(Z \geq t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y \geq kt).$$

2. b. Posons $r = e^{-\lambda t} \in]0; 1]$. On a $0 < qr < 1$, même pour $t = 0$ puisque $q < 1$. La question précédente donne une série géométrique convergente :

$$P(Z \geq t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} e^{-\lambda kt} = pr \sum_{k=1}^{+\infty} (qr)^{k-1} = \frac{pr}{1 - qr}.$$

Par conséquent, pour tout $t \geq 0$,

$$P(Z \geq t) = \frac{pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}}.$$

Le dénominateur est au moins $1 - q = p > 0$; la formule est donc définie en particulier en $t = 0$, où elle vaut 1.

2. c. On établit d'abord que Z n'a pas d'atome. Pour $t \geq 0$, l'événement $(Z = t)$ est l'union disjointe des événements $(X = k) \cap (Y = kt)$, $k \geq 1$. Chaque terme est de probabilité nulle, car il est inclus dans $(Y = kt)$. Les probabilités totales donnent donc $P(Z = t) = 0$. Pour $t < 0$, cela résulte de la positivité presque sûre de Z .

Il en résulte $P(Z > t) = P(Z \geq t)$ pour tout $t \geq 0$. La fonction de répartition de Z est ainsi

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - \frac{pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Elle est continue sur $\mathbb{R}$: les deux expressions se raccordent à la valeur 0 en $t = 0$, et le dénominateur reste strictement positif pour $t \geq 0$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. La caractérisation des variables à densité s'applique donc.

Pour $t > 0$, on dérive l'expression fermée obtenue, sans dériver la série infinie :

$$F'_Z(t) = \frac{p\lambda e^{-\lambda t}(1 - qe^{-\lambda t}) + pq\lambda e^{-2\lambda t}}{(1 - qe^{-\lambda t})^2} = \frac{p\lambda e^{-\lambda t}}{(1 - qe^{-\lambda t})^2}.$$

Une densité est donc

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \frac{p\lambda e^{-\lambda t}}{(1 - qe^{-\lambda t})^2} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Cette densité est positive et ses limites en 0 sont finies : 0 à gauche et λ/p à droite. Elle est continue sur chacun des deux intervalles séparés par 0. Enfin, $F_Z(t) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow +\infty$ et $F_Z(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow -\infty$, donc son intégrale vaut bien 1. Le choix de la valeur $f_Z(0) = 0$ n'a aucune incidence sur la loi.

Relevé des adaptations

Exercice 2, partie I, question 3 : Question adaptée au programme actuel. L'étude des branches infinies est guidée par les limites de $f(x)/x$ et $f(x) - x$, et les termes géométriques nécessaires sont définis localement, sans supposer un chapitre général d'asymptotes ou de branches paraboliques.

Exercice 2, partie II, question 3 : Code adapté en Python. La demande de programmation est transposée en Python, avec documentation de la commande de logarithme utilisée.

Exercice 2, partie III, préambule : la nature ouverte du domaine $\mathbb{R}^2$ est explicitement indiquée avant l'étude des extrema. Les questions sont conservées ; le corrigé applique la méthode actuelle par hessienne et signes de ses valeurs propres.