



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2009

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
1. b. Justifier que f est de classe C^1 sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
1. c. Montrer : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$.
1. d. Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
2. a. Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :
$$u(x) = (1 - x)e^x - 1.$$
2. b. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) < 0$.
2. c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Dresser le tableau des variations de f .
2. d. Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote, lorsque la variable tend vers $-\infty$.
2. e. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α , que l'on calculera.
2. a. Établir : $\forall x \in [0; +\infty[, \quad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.
2. b. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.
2. c. Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.
2. d. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.
4. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .
5. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

On pourra importer NumPy par `import numpy as np`. Pour un réel x , `np.exp(x)` renvoie e^x et, pour $x > 0$, `np.log(x)` renvoie $\ln(x)$. La fonction `abs` renvoie la valeur absolue.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt.$$

1. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. a. Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, \quad 0 \leq G(x) \leq xf(x)$. En déduire la limite de G en $+\infty$.
2. b. Montrer : $\forall x \in]-\infty; 0], \quad G(x) \leq xf(x)$. En déduire la limite de G en $-\infty$.
3. Dresser le tableau des variations de G . On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Partie I : Réduction de A

1. Est-ce que A est inversible ?
2. Déterminer les valeurs propres de A . Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.
3. Déterminer une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1, telle que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1} .

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation (1) : $M^2 = A$, d'inconnue M matrice carrée d'ordre trois.

Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}MP$. La matrice P a été définie en I.3.

1. Montrer : $M^2 = A \iff N^2 = D$.
2. Établir que, si $N^2 = D$, alors $ND = DN$.
3. En déduire que, si $N^2 = D$, alors N est diagonale.
4. Déterminer toutes les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$.
5. En déduire la solution B de l'équation (1) dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré deux, et un seul, que l'on calculera, tel que : $Q(0) = 0$, $Q(1) = 1$, $Q(4) = 2$.
2. En déduire : $-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B$. La matrice B a été définie en II.5.
3. Montrer, pour toute matrice carrée F d'ordre trois : $AF = FA \iff BF = FB$.

Exercice 3

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q .

Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T . Pour tout entier $k \geq 1$, donner $P(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T .
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1.

Pour tout entier naturel non nul i , on note B_i l'événement «la i -ème boule tirée est blanche» et N_i l'événement «la i -ème boule tirée est noire».

1. a. Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $P(X = k) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.

1. b. Vérifier :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1.$$

1. c. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

2. a. Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $P((X = k) \cap (Y = 1))$. On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.

2. b. En déduire : $P(Y = 1) = q(1 + p)$.

2. c. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \frac{1}{q}(1 - p + p^2)$.

3. Donner la loi de Z et son espérance.

4. Montrer que les variables aléatoires YZ et $X - 1$ sont égales.

5. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\text{Cov}(Y, Z)$ à l'aide de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.