



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2009

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie I : Étude d'une fonction

1. a. Sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, le dénominateur $e^x - 1$ ne s'annule pas : f y est donc continue comme quotient de fonctions continues.

La dérivabilité de l'exponentielle en 0 donne $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$. Par passage à l'inverse, $f(x) \rightarrow 1 = f(0)$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$.

1. b. Sur les deux intervalles considérés, le numérateur et le dénominateur sont de classe C^1 , et le dénominateur ne s'annule pas. Le quotient est donc de classe C^1 et, pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}.$$

1. c. Pour traiter le numérateur sans supposer une règle de produit des développements limités, on applique directement Taylor-Young à la fonction $u(x) = (1 - x)e^x - 1$. Elle est de classe C^2 près de 0, avec

$$u(0) = 0, \quad u'(x) = -xe^x, \quad u'(0) = 0, \quad u''(x) = -(1 + x)e^x, \quad u''(0) = -1.$$

Il existe donc une fonction ε telle que $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ et $u(x) = x^2(-1/2 + \varepsilon(x))$ lorsque $x \rightarrow 0$. Pour $x \neq 0$, la formule précédente s'écrit exactement

$$f'(x) = \frac{-1/2 + \varepsilon(x)}{((e^x - 1)/x)^2}.$$

Le dénominateur tend vers 1 ; les règles de calcul sur les limites donnent

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -1/2.$$

1. d. On établit d'abord directement la dérivabilité en 0. Taylor-Young à l'ordre deux pour l'exponentielle donne, pour une fonction η tendant vers 0,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\eta(x).$$

Pour $x \neq 0$, le taux d'accroissement de f en 0 vaut donc

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \frac{-1/2 - \eta(x)}{(e^x - 1)/x} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Ainsi $f'(0) = -1/2$. Sa dérivée est continue sur les deux demi-droites d'après I.1.b, et la limite calculée en I.1.c est précisément sa valeur en 0. Par conséquent f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Cette preuve utilise le taux d'accroissement en 0, sans théorème de prolongement de la dérivée.

2. a. La dérivée de u est $u'(x) = -xe^x$. Comme $e^x > 0$, elle est positive si $x < 0$, nulle en 0 et négative si $x > 0$. Les croissances comparées donnent $xe^x \rightarrow 0$ en $-\infty$, donc $u(x) \rightarrow -1$; en $+\infty$, $(1-x)e^x \rightarrow -\infty$.

La fonction u est strictement croissante de -1 à 0 sur $] -\infty; 0]$, puis strictement décroissante de 0 à $-\infty$ sur $[0; +\infty[$. En particulier $u(x) < 0$ pour $x \neq 0$.

2. b. Pour $x \neq 0$, le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif, et son numérateur $u(x)$ est strictement négatif. Ainsi $f'(x) < 0$. En 0, la valeur $f'(0) = -1/2$ est également strictement négative. L'inégalité est donc vraie sur tout $\mathbb{R}$.

2. c. Lorsque $x \rightarrow -\infty$, $e^x - 1 \rightarrow -1$; ainsi $f(x) \rightarrow +\infty$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on écrit

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} \rightarrow 0,$$

car $xe^{-x} \rightarrow 0$ par croissance comparée et $1 - e^{-x} \rightarrow 1$. La dérivée est strictement négative partout, d'où le tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	$-1/2$	—
$f(x)$	$+\infty$	1	0
Variation	décroît	décroît	

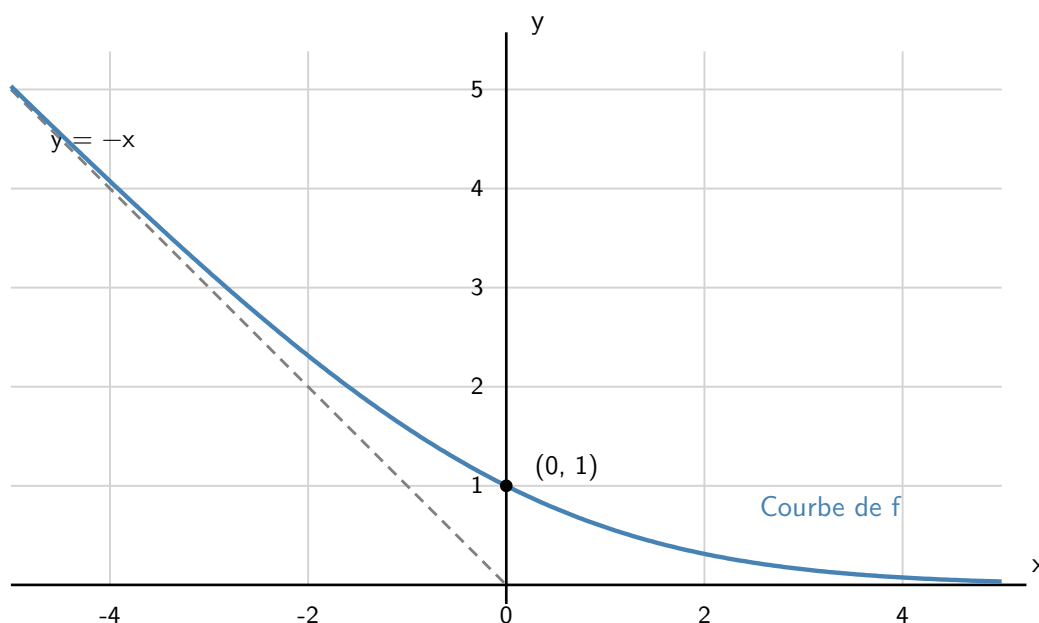
Pour tout réel x , on a de plus $f(x) > 0$: si $x \neq 0$, x et $e^x - 1$ ont le même signe ; en 0, $f(0) = 1$.

2. d. Pour $x \neq 0$, on calcule l'écart à la droite d'équation $y = -x$:

$$f(x) + x = \frac{xe^x}{e^x - 1}.$$

Quand $x \rightarrow -\infty$, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers -1 . Donc $f(x) + x \rightarrow 0$: la droite $y = -x$ est asymptote à la courbe en $-\infty$. Pour $x < 0$, le numérateur et le dénominateur de cet écart sont négatifs, donc l'écart est positif : la courbe est au-dessus de cette asymptote.

2. e. La courbe est strictement décroissante et reste au-dessus de l'axe des abscisses. Elle passe par $(0, 1)$, avec pour tangente en ce point la droite $y = 1 - x/2$. Elle s'approche de $y = -x$ en $-\infty$ et de $y = 0$ en $+\infty$. Le tracé suivant représente la fonction définie par sa formule ; l'asymptote oblique est en pointillés.



Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

1. Le réel 0 n'est pas un point fixe, puisque $f(0) = 1$. Pour $x \neq 0$, le dénominateur de $f(x)$ ne s'annule pas et l'on peut diviser l'égalité $x/(e^x - 1) = x$ par x . Elle équivaut à $e^x - 1 = 1$, soit $x = \ln 2$.

Le réel $\ln 2$ est non nul et vérifie bien $f(\ln 2) = \ln 2$. Ainsi l'unique point fixe est $\alpha = \ln 2$.

On a $0 < \alpha < 1$, car $\ln 2 = \int_1^2 dt/t$ est strictement compris entre 0 et 1.

2. a. Posons $h(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$ sur $[0; +\infty[$. Alors

$$h'(x) = 2e^x(e^x - 1 - x).$$

Pour $x \geq 0$, l'inégalité $e^x \geq 1 + x$, obtenue par convexité de l'exponentielle et sa tangente en 0, entraîne $h'(x) \geq 0$. La fonction h est donc croissante sur $[0; +\infty[$ et $h(0) = 0$. Par conséquent $h(x) \geq 0$ sur cet intervalle.

2. b. Pour $x > 0$, on met au même dénominateur :

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{2((1-x)e^x - 1) + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2}.$$

Le numérateur est $2e^x - 2xe^x - 2 + e^{2x} - 2e^x + 1 = e^{2x} - 2xe^x - 1$. Cela donne l'identité demandée.

2. c. Pour $x > 0$, le numérateur de l'expression obtenue en II.2.b est positif ou nul par II.2.a, et son dénominateur est strictement positif. Ainsi $f'(x) \geq -1/2$. L'étude de la partie I donne aussi $f'(x) < 0$. Enfin $f'(0) = -1/2$; les deux inégalités sont donc valables pour tout $x \geq 0$.

2. d. Comme $u_0 = 1 > 0$ et f est strictement positive, une récurrence donne $u_n > 0$ pour tout n . Le point fixe α est également positif.

La fonction f est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et y vérifie $|f'| \leq 1/2$. L'inégalité des accroissements finis s'applique donc entre u_n et α :

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

3. On itère l'inégalité précédente. Pour $n = 0$, $|u_0 - \alpha| = 1 - \alpha$ puisque $\alpha < 1$. Si

$$|u_n - \alpha| \leq 2^{-n}(1 - \alpha), \text{ alors}$$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq 2^{-(n+1)}(1 - \alpha).$$

Par récurrence, l'encadrement demandé est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Comme $2^{-n}(1 - \alpha) \rightarrow 0$, l'encadrement $0 \leq |u_n - \alpha| \leq 2^{-n}(1 - \alpha)$ donne

$$|u_n - \alpha| \rightarrow 0. \text{ La suite converge donc vers } \ln 2.$$

5. Code adapté en Python. Il faut tester l'erreur réelle $|u_n - \alpha|$, et non seulement la majoration de II.3, afin d'obtenir le premier rang satisfaisant la condition.

Python

```
import numpy as np

alpha = np.log(2)

u = 1.0
n = 0

while abs(u - alpha) >= 1e-9:
    u = u / (np.exp(u) - 1)
    n = n + 1

print(n)
```

Au début de chaque test, u représente u_n . La boucle continue tant que l'inégalité stricte demandée n'est pas vérifiée, puis remplace u_n par u_{n+1} et augmente le rang d'une unité. La convergence prouvée garantit l'arrêt dans le modèle de calcul exact. Les rangs sont parcourus dans l'ordre à partir de 0, donc le premier rang accepté est bien le plus petit.

Le programme a été exécuté avec les nombres flottants usuels : il affiche 21. L'erreur calculée au rang précédent est environ 1.601216×10^{-9} et celle au rang affiché environ 6.185407×10^{-10} ; elles encadrent bien le seuil demandé. Ces valeurs numériques illustrent l'exécution ; la convergence et le principe de l'algorithme reposent sur les preuves précédentes.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle possède donc une primitive H de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, par exemple $H(x) = \int_0^x f(t) dt$. On a $G(x) = H(2x) - H(x)$: cette fonction est de classe C^1 et

$$G'(x) = 2f(2x) - f(x).$$

Pour $x \neq 0$, on obtient, en utilisant $e^{2x} - 1 = (e^x - 1)(e^x + 1)$,

$$G'(x) = \frac{4x}{e^{2x} - 1} - \frac{x}{e^x - 1} = \frac{4x - x(e^x + 1)}{e^{2x} - 1} = \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1}.$$

En 0, la formule valable sur tout $\mathbb{R}$ donne $G'(0) = 2f(0) - f(0) = 1$. L'expression demandée est établie sans dérivation sous le signe intégral.

2. a. Si $x > 0$, f est positive et décroissante. Pour tout $t \in [x, 2x]$, $0 \leq f(t) \leq f(x)$. En intégrant sur ce segment de longueur x , on obtient $0 \leq G(x) \leq xf(x)$. Pour $x = 0$, les trois quantités sont nulles.

Or $xf(x) = x^2 e^{-x} / (1 - e^{-x}) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, par croissance comparée. Le théorème d'encadrement donne donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$.

2. b. Si $x < 0$, les bornes sont dans l'ordre $2x < x$. Pour $t \in [2x, x]$, la décroissance de f donne $f(t) \geq f(x)$. D'où

$$\int_{2x}^x f(t) dt \geq (x - 2x)f(x) = -xf(x).$$

En changeant le signe, $G(x) = -\int_{2x}^x f(t) dt \leq xf(x)$. En 0, l'égalité est vérifiée. Lorsque $x \rightarrow -\infty$, $xf(x) = x^2 / (e^x - 1) \rightarrow -\infty$. La majoration donne donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = -\infty$.

3. Pour $x \neq 0$, le quotient $x / (e^{2x} - 1)$ est strictement positif, car son numérateur et son dénominateur ont le même signe. Le signe de $G'(x)$ est donc celui de $3 - e^x$: positif si $x < \ln 3$ et négatif si $x > \ln 3$. En 0, la dérivée vaut $1 > 0$, et en $\ln 3$ elle est nulle.

Ainsi G est strictement croissante sur $] -\infty; \ln 3]$ et strictement décroissante sur $[\ln 3; +\infty[$. Elle atteint en $\ln 3$ son maximum global, dont on ne calcule pas la valeur. On sait que ce maximum est strictement positif puisque $\ln 3 > 0$ et que l'intégrale de $f > 0$ sur $[\ln 3, 2 \ln 3]$ est positive.

x	$-\infty$	0	$\ln 3$	$+\infty$
$G'(x)$	+	1	0	−
$G(x)$	$-\infty$	0	$G(\ln 3)$	0
Variation	croît	croît	maximum	décroît

Exercice 2

Partie I : Réduction de A

- La première colonne de A est nulle : le vecteur non nul $e_1 = {}^t(1, 0, 0)$ vérifie $Ae_1 = 0$.
Une matrice inversible a un noyau réduit au vecteur nul. Ainsi A n'est pas inversible.
- La matrice A est triangulaire supérieure : ses valeurs propres sont ses termes diagonaux, donc 0, 1 et 4. Elles sont distinctes. Une matrice d'ordre trois possédant trois valeurs propres distinctes est diagonalisable : des vecteurs propres non nuls associés à ces trois valeurs sont linéairement indépendants et forment donc une base. Aucun calcul de déterminant n'est nécessaire.
- On cherche des vecteurs propres adaptés à la contrainte sur la diagonale de P . On a

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On prend donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, donc elles forment une base : P est inversible. Pour calculer son inverse, on résout $PX = Y$. Les équations donnent successivement $x_3 = y_3$, $x_2 = y_2 - y_3$ et $x_1 = y_1 - y_2$. Par conséquent

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les identités entre colonnes s'écrivent $AP = PD$, donc $A = PDP^{-1}$.

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

1. Comme $N = P^{-1}MP$, on a $N^2 = P^{-1}M^2P$. Ainsi $M^2 = A$ entraîne $N^2 = P^{-1}AP = D$.

Réciproquement, si $N^2 = D$, alors $M = PNP^{-1}$ vérifie $M^2 = PN^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$. L'équivalence est donc démontrée dans les deux sens.

2. Si $N^2 = D$, l'associativité du produit matriciel donne

$$ND = N(N^2) = N^3 = (N^2)N = DN.$$

3. Méthode 1 — Égalité des coefficients

Écrivons $N = (n_{ij})$ et notons $d_1 = 0, d_2 = 1, d_3 = 4$ les coefficients diagonaux de D . Alors $(ND)_{ij} = n_{ij}d_j$ et $(DN)_{ij} = d_i n_{ij}$. L'égalité $ND = DN$ implique $(d_j - d_i)n_{ij} = 0$. Si $i \neq j$, les nombres d_i et d_j sont distincts, donc $n_{ij} = 0$. Ainsi N est diagonale.

Méthode 2 — Action sur les vecteurs de la base canonique

Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $De_i = d_i e_i$. Comme $DN = ND$, on obtient $D(Ne_i) = N(De_i) = d_i Ne_i$. Les équations de $Dv = d_i v$ montrent directement que v est un multiple de e_i , car les trois coefficients diagonaux sont distincts. Ainsi chaque colonne Ne_i est un multiple de e_i , ce qui signifie que N est diagonale. La première méthode donne le calcul coefficient par coefficient ; la seconde explique la préservation de chacune des trois droites propres.

4. Une matrice diagonale $N = \text{diag}(a, b, c)$ vérifie $N^2 = D$ si et seulement si $a^2 = 0$, $b^2 = 1$ et $c^2 = 4$. Il y a donc exactement quatre possibilités :

$$N = \text{diag}(0, \varepsilon, 2\delta), \quad (\varepsilon, \delta) \in \{-1, 1\}^2.$$

Les questions précédentes montrent que toutes les solutions, sans en oublier, s'obtiennent alors par $M = PNP^{-1}$. Leur expression est

$$M_{\varepsilon, \delta} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 2\delta - \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 2\delta - \varepsilon \\ 0 & 0 & 2\delta \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon, \delta) \in \{-1, 1\}^2.$$

5. Les valeurs propres de $M_{\varepsilon, \delta}$ sont $0, \varepsilon$ et 2δ , par similitude avec N ou par lecture de cette matrice triangulaire. Elles sont toutes positives ou nulles si et seulement si

$\varepsilon = 1$ et $\delta = 1$. La solution demandée est donc unique et vaut

$$B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Elle vérifie bien $B^2 = A$ d'après II.1, ou par multiplication directe.

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Écrivons $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Les trois conditions deviennent $c = 0$, $a + b = 1$ et $16a + 4b = 2$. En retranchant quatre fois la deuxième égalité à la troisième, on obtient $12a = -2$, soit $a = -1/6$, puis $b = 7/6$.

Ainsi

$$Q(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x.$$

Ce polynôme est bien de degré deux et satisfait les trois valeurs imposées. Les équations ont déterminé tous ses coefficients de manière unique ; il est donc l'unique solution.

Une autre justification de l'unicité est la suivante : la différence de deux polynômes de degré au plus deux satisfaisant ces conditions s'annulerait en 0, 1 et 4. Un polynôme de degré au plus deux possédant trois racines distinctes est nul.

2. Méthode 1 — Calcul dans la base propre

La relation $A = PDP^{-1}$ entraîne $A^2 = PD^2P^{-1}$, car les facteurs intermédiaires $P^{-1}P$ s'annulent. Par linéarité,

$$Q(A) = P \left(-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D \right) P^{-1} = P \operatorname{diag}(Q(0), Q(1), Q(4)) P^{-1}.$$

Les valeurs de Q calculées en III.1 sont 0, 1 et 2. La dernière expression est donc exactement B , obtenue en II.5.

Méthode 2 — Vérification matricielle directe

La multiplication donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent les coefficients non nuls de $-A^2/6 + 7A/6$ sont $-1/6 + 7/6 = 1$ en positions $(1, 2)$ et $(2, 2)$, $-15/6 + 21/6 = 1$ en positions $(1, 3)$ et $(2, 3)$, et $-16/6 + 28/6 = 2$ en position $(3, 3)$. On retrouve B . La première méthode réutilise la diagonalisation ; la seconde permet un contrôle explicite rapide pour cette petite matrice.

3. Si $AF = FA$, alors $A^2F = A(AF) = A(FA) = (AF)A = (FA)A = FA^2$. La relation $B = -A^2/6 + 7A/6$ donne alors

$$BF = -\frac{1}{6}A^2F + \frac{7}{6}AF = -\frac{1}{6}FA^2 + \frac{7}{6}FA = FB.$$

Réciproquement, si $BF = FB$, le même calcul d'associativité montre $B^2F = FB^2$. Or $B^2 = A$, donc $AF = FA$. L'équivalence est démontrée.

Exercice 3

Les tirages sont effectués avec remise : leurs couleurs sont indépendantes, avec probabilité p de blanc et q de noir à chaque tirage. Comme $0 < p, q < 1$, la probabilité de ne jamais obtenir une couleur donnée est nulle : par exemple la probabilité d'avoir uniquement des blancs pendant les m premiers tirages est $p^m \rightarrow 0$. Les temps d'arrêt utilisés sont donc finis presque sûrement. Les variables peuvent être définies

arbitrairement sur les événements exceptionnels de probabilité nulle, sans modifier leurs lois ; les égalités entre variables ci-dessous s'entendent presque sûrement.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

1. Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de succès « obtenir une boule noire », de probabilité q , et T est le rang du premier succès. Ainsi T suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre q . Pour $k \geq 1$,

$$P(T = k) = p^{k-1}q.$$

Cette loi admet une espérance et une variance données par

$$E(T) = \frac{1}{q}, \quad \mathbb{V}(T) = \frac{1-q}{q^2} = \frac{p}{q^2}.$$

2. Le dernier tirage est noir et les $T - 1$ tirages précédents sont blancs. Donc $U = T - 1$. Une transformation affine d'une variable ayant un moment d'ordre deux a elle-même une espérance et une variance. On obtient

$$E(U) = E(T) - 1 = \frac{1}{q} - 1 = \frac{p}{q}, \quad \mathbb{V}(U) = \mathbb{V}(T) = \frac{p}{q^2}.$$

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

1. a. Pour $k \geq 2$, l'arrêt au tirage k se produit dans deux cas disjoints : les $k - 1$ premiers tirages sont blancs et le dernier est noir, ou les $k - 1$ premiers sont noirs et le dernier est blanc. Ainsi

$$(X = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i \cap N_k \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} N_i \cap B_k \right).$$

L'indépendance des tirages donne les probabilités $p^{k-1}q$ et $q^{k-1}p$. Leur somme vaut donc $P(X = k) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$. Le support est $\{2, 3, \dots\}$.

1. b. Comme p et q appartiennent à $]0, 1[$, les séries géométriques convergent. Par linéarité,

$$\sum_{k=2}^{\infty} P(X = k) = q \frac{p}{1-p} + p \frac{q}{1-q} = q \frac{p}{q} + p \frac{q}{p} = p + q = 1.$$

La somme des probabilités est bien égale à 1.

1. c. Méthode 1 — Série géométrique dérivée

Pour $r \in]0, 1[$, la première série géométrique dérivée donne

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} = 1/(1-r)^2.$$

En retirant le terme $k = 1$, on obtient

$$\sum_{k=2}^{\infty} k r^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2} - 1.$$

Les termes étant positifs, les deux séries obtenues avec $r = p$ et $r = q$ convergent et garantissent l'existence de l'espérance de X . Alors

$$E(X) = q \left(\frac{1}{q^2} - 1 \right) + p \left(\frac{1}{p^2} - 1 \right) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - (p + q) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Méthode 2 — Décomposition de la loi par le premier tirage

L'égalité de II.1.a s'écrit, pour $k \geq 2$,

$$P(X = k) = p(qp^{k-2}) + q(pq^{k-2}).$$

Les expressions entre parenthèses sont les probabilités, au rang $k - 1$, de lois géométriques de paramètres respectifs q et p . En sommant k fois cette identité, les espérances de ces lois usuelles montrent que la série converge et donnent

$$E(X) = p \left(1 + \frac{1}{q}\right) + q \left(1 + \frac{1}{p}\right) = 1 + \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.$$

Comme $p/q = 1/q - 1$ et $q/p = 1/p - 1$, on retrouve $1/p + 1/q - 1$. Cette méthode interprète le nombre de tirages comme le premier tirage puis l'attente de la couleur opposée ; le calcul reste une somme de probabilités et n'utilise pas de notion d'espérance conditionnelle.

2. a. Si $k = 2$, l'arrêt correspond aux deux suites de couleurs blanc-noir et noir-blanc ; chacune contient exactement une boule blanche. Donc

$$P((X = 2) \cap (Y = 1)) = 2pq.$$

Si $k \geq 3$, pour n'avoir qu'une boule blanche à l'arrêt, les $k - 1$ premières boules doivent être noires et la dernière blanche. L'autre possibilité d'arrêt comporterait $k - 1 \geq 2$ blanches. Par conséquent

$$P((X = k) \cap (Y = 1)) = pq^{k-1} \quad (k \geq 3).$$

2. b. Les événements $(X = k)$, pour $k \geq 2$, forment un système complet à un événement de probabilité nulle près. Par somme des probabilités des événements disjoints calculés en II.2.a,

$$P(Y = 1) = 2pq + p \sum_{k=3}^{\infty} q^{k-1} = 2pq + p \frac{q^2}{1 - q} = 2pq + q^2.$$

Comme $2p + q = 1 + p$, on obtient $P(Y = 1) = q(1 + p)$.

2. c. La variable Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. La probabilité de $Y = 1$ vient d'être calculée. Si $j \geq 2$, il faut que la première couleur soit blanche : les j premiers tirages sont alors blancs, et le tirage $j + 1$ noir met fin à l'expérience. Cela donne

$$P(Y = j) = \begin{cases} q(1 + p) & \text{si } j = 1, \\ qp^j & \text{si } j \geq 2. \end{cases}$$

La normalisation se vérifie par

$$q(1 + p) + q \sum_{j=2}^{\infty} p^j = q(1 + p) + p^2 = 1.$$

L'énoncé admet l'existence et la valeur $E(Y) = (1 - p + p^2)/q$, qui seront utilisées ensuite.

3. En échangeant les couleurs, on échange p avec q , et Y avec Z . On en déduit

$$P(Z = j) = \begin{cases} p(1 + q) & \text{si } j = 1, \\ pq^j & \text{si } j \geq 2. \end{cases}$$

La même symétrie appliquée au résultat admis pour Y donne l'existence de l'espérance de Z et

$$E(Z) = \frac{1 - q + q^2}{p} = 1 + \frac{q^2}{p}.$$

On peut aussi utiliser $Y + Z = X$: comme X et Y sont intégrables, $Z = X - Y$ l'est et $E(Z) = E(X) - E(Y)$, ce qui donne la même expression.

4. À l'arrêt, une couleur a été obtenue une seule fois : celle du dernier tirage. Ainsi $Y = 1$ ou $Z = 1$, et toujours $X = Y + Z$. Si $Y = 1$, on a $YZ = Z = X - 1$; si $Z = 1$, on a $YZ = Y = X - 1$. Cela comprend le cas $Y = Z = 1$. Donc $YZ = X - 1$ presque sûrement.

5. Pour justifier la covariance dans le cadre des moments d'ordre deux, on vérifie que X admet un moment d'ordre deux. Pour $0 < r < 1$, les deux séries géométriques

dérivées usuelles donnent

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)r^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} = \frac{2r}{(1-r)^3} + \frac{1}{(1-r)^2} < +\infty.$$

La loi de X est une combinaison positive des termes de ces séries avec $r = p$ et $r = q$; donc $E(X^2) < +\infty$. Comme $1 \leq Y \leq X$ et $1 \leq Z \leq X$, on a $Y^2, Z^2 \leq X^2$. Par comparaison des séries positives, Y et Z ont un moment d'ordre deux. Leur covariance existe donc.

L'égalité $YZ = X - 1$ donne aussi directement l'intégrabilité de YZ et $E(YZ) = E(X) - 1$. La formule de la covariance conduit à

$$\text{Cov}(Y, Z) = E(X) - 1 - E(Y)E(Z).$$

Pour simplifier, les espérances sont $E(Y) = 1 + p^2/q$ et $E(Z) = 1 + q^2/p$. Or $p^3 + q^3 = (p + q)^3 - 3pq(p + q) = 1 - 3pq$, donc

$$E(Y)E(Z) = 1 + \frac{p^2}{q} + \frac{q^2}{p} + pq = 1 + \frac{1 - 3pq}{pq} + pq = \frac{1}{pq} - 2 + pq.$$

De plus $E(X) - 1 = 1/p + 1/q - 2 = 1/(pq) - 2$. Ainsi, si l'on souhaite l'expression uniquement en fonction de p et q ,

$$\text{Cov}(Y, Z) = -pq < 0.$$

Relevé des adaptations

Exercice 1, partie II, question 5 : Code adapté en Python. Le langage demandé est remplacé par Python et les commandes exponentielle et logarithme utiles sont documentées; la recherche du premier rang satisfaisant la précision demandée est conservée.