



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2008

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie I : Étude d'une fonction

1. Sur $]0; +\infty[$, les fonctions $t \mapsto t \ln t$ et $t \mapsto t$ sont continues ; leur différence l'est donc aussi. À l'origine, les croissances comparées donnent $t \ln t \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$: en posant $u = 1/t$, cela revient à $\ln u/u \rightarrow 0$ lorsque $u \rightarrow +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0 = f(0).$$

La fonction f est donc continue sur $[0; +\infty[$. Le domaine annoncé dans le préambule est harmonisé avec la définition de $f(0)$ et la demande de cette question : le crochet en 0 est fermé.

2. Sur $]0; +\infty[$, le logarithme et les opérations utilisées sont de classe C^1 . Par dérivation du produit, pour tout $t > 0$,

$$f'(t) = \ln t + t \frac{1}{t} - 1 = \ln t.$$

Cette dérivée est continue sur $]0; +\infty[$, ce qui justifie que f y est de classe C^1 .

3. Pour $t > 0$, on écrit $f(t) = t(\ln t - 1)$. Si $t \geq e^2$, alors $\ln t - 1 \geq 1$, donc $f(t) \geq t$. Par comparaison,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty.$$

4. Le logarithme est strictement négatif sur $]0; 1[$, nul en 1 et strictement positif sur $]1; +\infty[$. La fonction f décroît donc strictement sur $[0; 1]$, puis croît strictement sur $[1; +\infty[$. On utilise sa continuité à l'origine pour inclure 0 dans le premier intervalle. Ses valeurs remarquables sont $f(0) = 0$ et $f(1) = -1$.

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$		0	
Variations de f	0	$\searrow -1 \nearrow$	$+\infty$

Ainsi, f atteint son minimum global -1 uniquement en $t = 1$.

5. Sur $]0; +\infty[$, la dérivée $f'(t) = \ln t$ est dérivable et $f''(t) = 1/t > 0$. La fonction f est donc de classe C^2 et convexe sur cet intervalle, par le critère du signe de la dérivée seconde.

6. a. Pour étudier la demi-tangente au point $O = (0, 0)$, calculons le taux d'accroissement à droite :

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \ln t - 1 \rightarrow -\infty \quad (t \rightarrow 0^+).$$

La courbe admet donc en O une demi-tangente verticale, d'équation $t = 0$, dirigée vers les ordonnées négatives lorsque l'on part de O vers les points d'abscisse positive.

b. Le point O appartient à Γ . Pour $t > 0$,

$$f(t) = 0 \iff t(\ln t - 1) = 0 \iff \ln t = 1 \iff t = e.$$

Les deux points d'intersection avec l'axe des abscisses sont exactement $(0, 0)$ et $(e, 0)$.

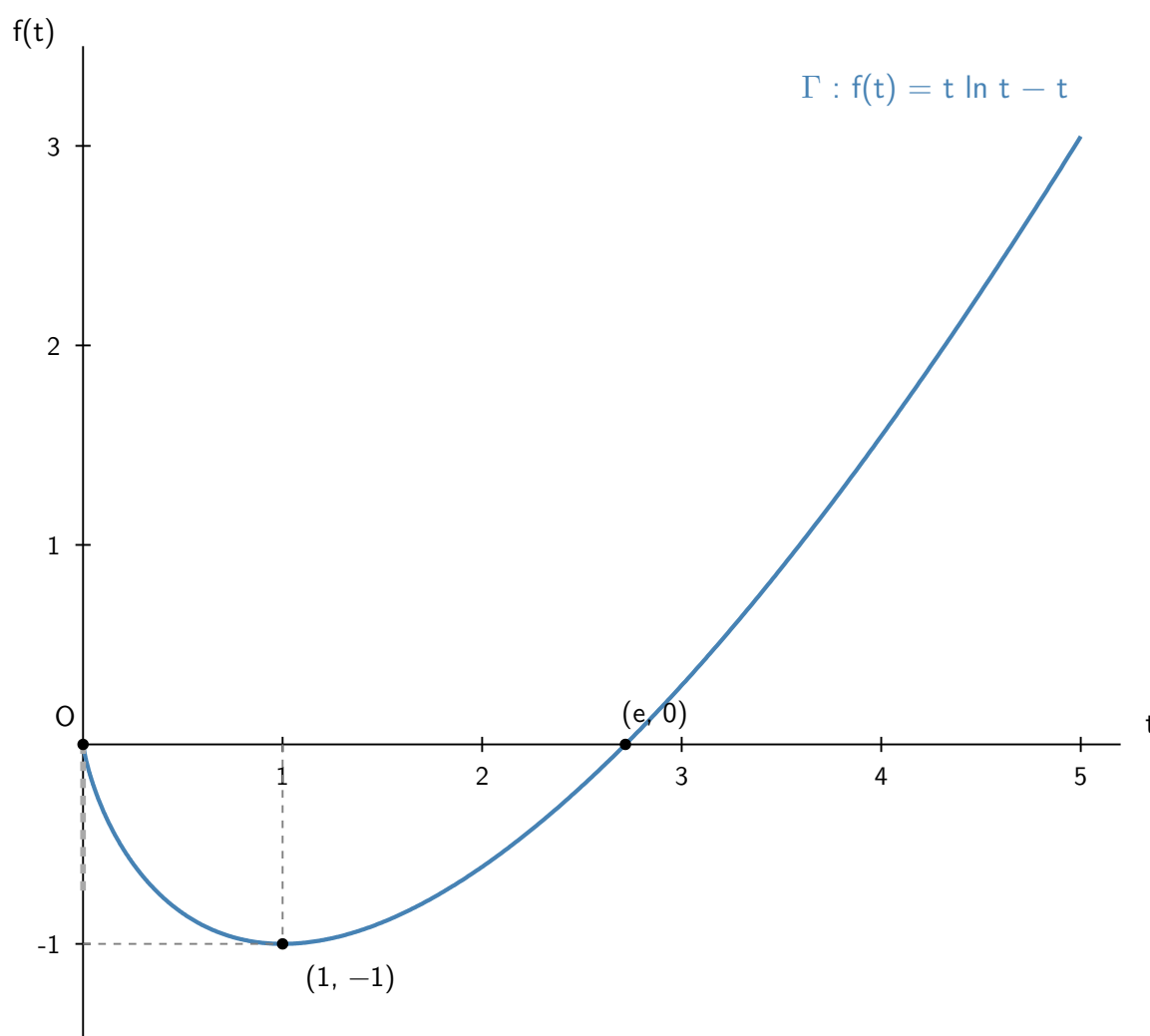
c. Question adaptée au programme actuel : les limites à étudier et le vocabulaire de la branche infinie sont explicités dans le sujet.

On a déjà montré que $f(t) \rightarrow +\infty$. En outre,

$$\frac{f(t)}{t} = \ln t - 1 \longrightarrow +\infty.$$

La branche infinie est donc parabolique, de direction l'axe des ordonnées, au sens rappelé dans l'énoncé. En particulier, elle ne possède pas d'asymptote oblique de pente finie.

- d. La courbe part de l'origine avec une demi-tangente verticale descendante, atteint son minimum en $(1, -1)$, puis remonte en restant convexe. Elle coupe de nouveau l'axe des abscisses en $(e, 0)$, avec $2,7 < e < 2,8$, et possède la branche infinie étudiée précédemment. Le tracé suivant utilise directement la formule de f .



Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. Puisque f est continue sur $]0; +\infty[$, elle y possède une primitive F . Pour $x > 1$, les deux bornes $x - 1$ et $x + 1$ sont strictement positives, donc

$$G(x) = \frac{1}{2}(F(x+1) - F(x-1)).$$

La fonction f étant de classe C^1 sur $]0; +\infty[$, sa primitive F est de classe C^2 . La formule précédente, par composition avec des fonctions affines, prouve que G est de classe C^2 sur $]1; +\infty[$. En dérivant une première fois, puis une seconde fois,

$$G'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)),$$

$$G''(x) = \frac{1}{2}(f'(x+1) - f'(x-1)) = \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(x-1)).$$

Cette preuve utilise une primitive et ne suppose aucun théorème de dérivation sous le signe intégral.

2. a. Pour tout $x > 1$, on a $x + 1 > x - 1 > 0$. La stricte croissance du logarithme entraîne $G''(x) > 0$. La fonction G' est donc strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

- b. On utilise $f(3) = 3 \ln 3 - 3$ et $f(1) = -1$:

$$G'(2) = \frac{1}{2}(3 \ln 3 - 2).$$

Comme $e < 2, 8 < 3$, on a $\ln 3 > 1$. Par conséquent, $G'(2) > \frac{1}{2} > 0$.

c. Par continuité de f à droite de 0 et en 2,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} G'(x) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0)) = \ln 2 - 1 < 0,$$

car $2 < e$. Il existe donc un réel $b \in]1; 2[$ suffisamment proche de 1 tel que $G'(b) < 0$. La fonction G' est continue sur $[b; 2]$ et $G'(2) > 0$: le théorème des valeurs intermédiaires fournit un zéro $\alpha \in]b; 2[$. Sa stricte croissance sur $]1; +\infty[$ assure l'unicité de ce zéro sur tout cet intervalle.

On a ainsi $1 < \alpha < 2$ et, par l'expression de G' , l'identité utile pour la suite :

$$f(\alpha + 1) = f(\alpha - 1).$$

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles

Rectification du domaine de l'énoncé original : celui-ci écrit $]1; +\infty[^2$. Or $0 < \alpha - 1 < 1$ et $f(\alpha - 1) = (\alpha - 1)(\ln(\alpha - 1) - 1) < 0$. Par II.2.c, la seconde coordonnée du point demandé, $f(\alpha + 1) = f(\alpha - 1)$, est donc négative ; ce point n'appartient pas au domaine imprimé. Le domaine est rectifié en $U =]1; +\infty[\times \mathbb{R}$, et son caractère ouvert est indiqué dans le sujet. Cette correction rend les trois questions cohérentes tout en conservant la formule de Φ .

1. Pour $x > 1$, les nombres $x - 1$ et $x + 1$ sont strictement positifs ; f y est de classe C^2 .

Les compositions, sommes et produits qui définissent Φ montrent donc que Φ est de classe C^2 sur l'ouvert U .

En dérivant chaque carré, on obtient, pour tout $(x, y) \in U$,

$$\partial_1 \Phi(x, y) = -2(y - f(x + 1)) \ln(x + 1) - 2(y - f(x - 1)) \ln(x - 1),$$

$$\partial_2 \Phi(x, y) = 2(y - f(x + 1)) + 2(y - f(x - 1)) = 4y - 2f(x + 1) - 2f(x - 1).$$

2. Posons $y_0 = f(\alpha + 1)$. Le point (α, y_0) appartient à U puisque $\alpha > 1$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
L'égalité $f(\alpha + 1) = f(\alpha - 1)$ donne

$$y_0 - f(\alpha + 1) = y_0 - f(\alpha - 1) = 0.$$

Les deux dérivées partielles calculées en III.1 sont donc nulles en ce point. Ainsi, $(\alpha, f(\alpha + 1))$ est bien un point critique de Φ sur le domaine rectifié.

3. Méthode 1 — Hessienne et signes de ses valeurs propres

Nous calculons d'abord la hessienne au point critique. En posant $a = \ln(\alpha + 1)$ et $b = \ln(\alpha - 1)$, la dérivation des expressions de III.1 donne

$$H = \nabla^2 \Phi(\alpha, y_0) = \begin{pmatrix} 2(a^2 + b^2) & -2(a + b) \\ -2(a + b) & 4 \end{pmatrix}.$$

En effet, dans $\partial_{11} \Phi$, les termes qui contiennent les facteurs $y_0 - f(\alpha + 1)$ ou $y_0 - f(\alpha - 1)$ sont nuls ; les termes restants sont $2f'(\alpha + 1)^2 + 2f'(\alpha - 1)^2$. On a aussi $\partial_{12} \Phi = -2f'(x + 1) - 2f'(x - 1)$ et $\partial_{22} \Phi = 4$.

La matrice H est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Étudions le signe d'une de ses valeurs propres λ , associée à un vecteur propre réel non nul (u, v) . En multipliant la première équation de $H \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ par u , la seconde par v , puis en additionnant, on obtient

$$\lambda(u^2 + v^2) = 2(a^2 + b^2)u^2 - 4(a + b)uv + 4v^2 = 2(au - v)^2 + 2(bu - v)^2.$$

Cette dernière quantité est strictement positive. En effet, si elle était nulle, les deux carrés seraient nuls : $au = v$ et $bu = v$, donc $(a - b)u = 0$. Or $a > b$ puisque $\alpha + 1 > \alpha - 1 > 0$; il faudrait $u = 0$, puis $v = 0$, ce qui contredit le choix du vecteur propre. Comme $u^2 + v^2 > 0$, on en déduit $\lambda > 0$.

Toutes les valeurs propres de H sont donc strictement positives, sans calcul de déterminant ni recours à l'ancien critère d'extremum. Puisque Φ est de classe C^2 sur l'ouvert U et que (α, y_0) est critique, le critère de la hessienne prouve l'existence d'un minimum local strict en ce point.

Méthode 2 — Somme de carrés et minimum global

Pour tout $(x, y) \in U$, on a $\Phi(x, y) \geq 0$. Au point (α, y_0) , les deux carrés sont nuls, donc $\Phi(\alpha, y_0) = 0$: ce point est même un minimum global.

Vérifions qu'il est strict. Si $\Phi(x, y) = 0$, les deux carrés doivent être nuls, d'où $y = f(x + 1) = f(x - 1)$. Cette dernière égalité équivaut à $G'(x) = 0$. Par II.2.c, elle impose $x = \alpha$, puis $y = y_0$. Ainsi, tout autre point de U donne une valeur strictement positive. Le minimum global est donc unique et strict.

La première méthode applique le critère demandé pour les fonctions de deux variables ; la seconde exploite la forme particulière de la fonction et précise le caractère global du minimum.

Exercice 2

Partie I : Réduction simultanée de A et B

1. Pour limiter la recherche des valeurs propres, calculons des produits de matrices :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A.$$

Si λ est une valeur propre de A et V un vecteur propre non nul, alors $A^3V = \lambda^3V$ et $AV = \lambda V$. L'identité $A^3 = A$ donne $(\lambda^3 - \lambda)V = 0$, donc $\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$. Les seules valeurs propres possibles sont $0, -1, 1$.

Déterminons les vecteurs propres correspondants en résolvant les trois systèmes particuliers.

Pour $\lambda = 0$, l'équation $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ donne $-z = 0$ et $x + y + z = 0$; la troisième ligne est alors satisfaite. Ainsi, $z = 0$ et $x = -y$, donc

$$E_0(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour $\lambda = -1$, l'équation $(A + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ s'écrit $2x + y + z = 0$, $y - z = 0$ et $-2x - 2y = 0$. Elle équivaut à $z = y$ et $x = -y$, d'où

$$E_{-1}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour $\lambda = 1$, l'équation $(A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ donne $y + z = 0$ et $x + y + z = 0$. On obtient

$x = 0, z = -y$, donc

$$E_1(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Chacun de ces sous-espaces contient un vecteur non nul ; les trois valeurs possibles sont donc effectivement des valeurs propres. Finalement, $\text{Sp}(A) = \{0, -1, 1\}$, avec les trois droites propres ci-dessus.

2. Les trois vecteurs propres obtenus sont associés à des valeurs propres distinctes ; ils forment donc une famille libre de $\mathbb{R}^3$, donc une base. En les plaçant dans l'ordre des éléments diagonaux de D , on prend

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La deuxième ligne est bien $(-1 \ 1 \ 1)$. Cette matrice est inversible puisque ses colonnes forment une base. Les relations de vecteurs propres donnent $AP = PD$, donc $A = PDP^{-1}$.

Pour calculer l'inverse sans déterminant, résolvons

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Les équations sont

$$x - y = u, \quad -x + y + z = v, \quad y - z = w.$$

La deuxième donne $z = u + v$, puis la troisième $y = u + v + w$, et la première $x = 2u + v + w$. Ainsi,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Le produit de B par chacune des colonnes de P donne

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $BP = P \operatorname{diag}(1, 0, -1)$. En multipliant à gauche par P^{-1} , il vient

$$C = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice C est bien diagonale ; A et B sont diagonalisées dans la même base.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

La lettre f désigne désormais l'application de l'exercice 2 ; elle n'a pas de lien avec la fonction de l'exercice 1.

1. Pour $1 \leq i, j \leq 3$, notons E_{ij} la matrice dont le coefficient en position (i, j) vaut 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. Toute matrice $M = (m_{ij})$ s'écrit de façon unique

$$M = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_{ij} E_{ij}.$$

Ces neuf matrices constituent donc une base de $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\dim(E) = 9$.

2. Pour toute matrice $M \in E$, les produits AM et MB appartiennent à E , donc $f(M) = AM - MB \in E$. Si $M, L \in E$ et $r, s \in \mathbb{R}$, la distributivité des produits matriciels donne

$$\begin{aligned} f(rM + sL) &= A(rM + sL) - (rM + sL)B = r(AM - MB) + s(AL - LB) = rf(M) \\ &\quad + sf(L). \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire de E dans lui-même, donc c'est un endomorphisme.

Pour étudier cet endomorphisme concret par sa matrice, on peut utiliser la base $\mathcal{Q} = (Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, Q_{31}, Q_{32}, Q_{33})$, où $Q_{ij} = PE_{ij}P^{-1}$. C'est une base, car la transformation $N \mapsto PNP^{-1}$ est linéaire et possède l'inverse $M \mapsto P^{-1}MP$. Comme $A = PDP^{-1}$ et $B = PCP^{-1}$,

$$f(PE_{ij}P^{-1}) = P(DE_{ij} - E_{ij}C)P^{-1} = (d_i - c_j)Q_{ij},$$

où $(d_1, d_2, d_3) = (0, -1, 1)$ et $(c_1, c_2, c_3) = (1, 0, -1)$. La matrice de f dans $\mathcal{Q}$ est donc la matrice diagonale d'ordre neuf

$$\text{Mat}_{\mathcal{Q}}(f) = \text{diag}(-1, 0, 1, -2, -1, 0, 0, 1, 2).$$

Les questions suivantes retrouvent directement ses coefficients nuls dans les coordonnées de N .

3. a. Pour $M \in E$, on a $M \in \text{Ker}(f)$ si et seulement si $AM = MB$. On multiplie cette égalité à gauche par P^{-1} et à droite par P , deux opérations réversibles :

$$AM = MB \iff (P^{-1}AP)(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)(P^{-1}BP) \iff DN = NC.$$

C'est l'équivalence demandée.

- b. Écrivons $N = (n_{ij})$. Multiplier à gauche par D multiplie chaque ligne par l'élément diagonal correspondant ; multiplier à droite par C multiplie chaque colonne par l'élément diagonal correspondant. Ainsi, $DN = NC$ équivaut à $(d_i - c_j)n_{ij} = 0$ pour tous les indices. La matrice des coefficients $d_i - c_j$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tous les coefficients n_{ij} sont donc nuls, sauf éventuellement n_{12} , n_{23} et n_{31} .

Réciproquement, ces trois positions donnent bien l'égalité $DN = NC$. Les matrices cherchées sont exactement

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

- c. L'ensemble trouvé est $\mathcal{S} = \text{Vect}(E_{12}, E_{23}, E_{31})$: il est donc un sous-espace vectoriel de E . Ces trois matrices sont libres, car dans l'égalité $aE_{12} + bE_{23} + cE_{31} = 0$, l'examen des positions $(1, 2)$, $(2, 3)$ et $(3, 1)$ impose successivement $a = b = c = 0$. Elles constituent donc une base de $\mathcal{S}$, dont la dimension est 3.
4. a. L'application $N \mapsto PNP^{-1}$ est un isomorphisme de E ; par l'équivalence de II.3.a, elle envoie $\mathcal{S}$ bijectivement sur $\text{Ker}(f)$. Les dimensions sont donc égales :

$$\dim \text{Ker}(f) = 3.$$

Le théorème du rang s'applique à l'endomorphisme f de l'espace de dimension finie E ; il donne

$$\dim \text{Im}(f) = \dim E - \dim \text{Ker}(f) = 9 - 3 = 6.$$

La matrice diagonale obtenue en II.2 confirme ces dimensions : elle possède trois colonnes nulles et six colonnes non nulles indépendantes.

b. Prenons $N = E_{12} \in \mathcal{S}$. Le produit explicite donne

$$M_0 = PE_{12}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est non nulle et appartient à $\text{Ker}(f)$ par II.3.a. Pour l'image, la matrice identité I_3 fournit

$$f(I_3) = A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Elle est non nulle, notamment parce que son coefficient $(1, 1)$ vaut -1 , et elle appartient à $\text{Im}(f)$ par construction.

Exercice 3

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

1. a. Sur $[0; 1]$, le dénominateur $2 - x$ est strictement positif. La fonction h est donc continue et dérivable sur cet intervalle, avec

$$h'(x) = \frac{(2-x) + x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} > 0.$$

Elle est strictement croissante, et $h(0) = 0$, $h(1) = 1$. Le théorème de la bijection montre donc que h est une bijection de $[0; 1]$ sur $[0; 1]$. Pour $y \in [0; 1]$, la résolution de $y = x/(2 - x)$ donne $2y = x(1 + y)$, puis

$$h^{-1}(y) = \frac{2y}{1 + y}.$$

Ce nombre est bien dans $[0; 1]$: il est positif et $2y \leq 1 + y$ équivaut à $y \leq 1$.

- b.** L'identité cherchée, après multiplication par $2 - x \neq 0$, est $x = \alpha(2 - x) + \beta$. L'égalité des coefficients donne $-\alpha = 1$ et $2\alpha + \beta = 0$. Ainsi,

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2, \quad h(x) = -1 + \frac{2}{2 - x}.$$

Ces lettres sont propres à cet exercice et ne désignent pas le nombre α de l'exercice 1.

- c.** L'intégrande est continue sur $[0; 1]$. Une primitive de $-1 + 2/(2 - x)$ est $-x - 2 \ln(2 - x)$, puisque la dérivée de $\ln(2 - x)$ vaut $-1/(2 - x)$. Par conséquent,

$$\int_0^1 h(x) dx = [-x - 2 \ln(2 - x)]_0^1 = -1 + 2 \ln 2.$$

- 2. a.** Pour une variable uniforme sur $[a; b]$, l'espérance est $(a + b)/2$ et la variance $(b - a)^2/12$. Ici,

$$E(X) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{12}.$$

- b.** Puisque $X \in [0; 1]$ presque sûrement et que h est strictement croissante sur cet intervalle, pour tout $y \in [0; 1]$,

$$\left(\frac{X}{2-X} \leq y\right) = \left(X \leq \frac{2y}{1+y}\right)$$

à un événement de probabilité nulle près. Le seuil $2y/(1+y)$ appartient à $[0; 1]$, et la fonction de répartition de la loi uniforme vaut ce seuil. Ainsi,

$$P\left(\frac{X}{2-X} \leq y\right) = \frac{2y}{1+y}.$$

- c. La variable $Y = h(X)$ prend ses valeurs dans $[0; 1]$ presque sûrement. La question précédente donne sa fonction de répartition sur cet intervalle, et l'on complète sur $\mathbb{R}$:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ \frac{2y}{1+y} & \text{si } 0 \leq y \leq 1, \\ 1 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

La formule centrale vaut 0 en 0 et 1 en 1 ; F_Y est donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe C^1 sauf éventuellement en 0 et 1. La variable Y admet ainsi une densité, obtenue en dérivant sur les intervalles ouverts :

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{(1+y)^2} & \text{si } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est positive, avec des limites latérales finies aux bornes, et sa

normalisation se vérifie directement : $\int_0^1 2/(1+y)^2 dy = [-2/(1+y)]_0^1 = 1$. Les valeurs attribuées à la densité en 0 et 1 ne modifient pas la loi.

- d. Méthode 1 — Transfert depuis la variable uniforme

Le théorème de transfert s'applique à $Y = h(X)$, avec h continue sur $[0; 1]$. L'intégrale absolue est finie, car $0 \leq h(x) \leq 1$ sur cet intervalle. En utilisant la densité uniforme égale à 1 sur $]0; 1[$ et le calcul de I.1.c,

$$E(Y) = \int_0^1 h(x) dx = 2 \ln 2 - 1.$$

Méthode 2 — Intégration avec la densité de Y

La fonction $y \mapsto yg(y)$ est positive et bornée sur $]0; 1[$, nulle ailleurs, donc son intégrale est finie. On peut calculer l'espérance directement :

$$E(Y) = \int_0^1 \frac{2y}{(1+y)^2} dy = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+y} - \frac{2}{(1+y)^2} \right) dy.$$

Une primitive est $2 \ln(1+y) + 2/(1+y)$. Il vient

$$E(Y) = \left[2 \ln(1+y) + \frac{2}{1+y} \right]_0^1 = (2 \ln 2 + 1) - 2 = 2 \ln 2 - 1.$$

Le transfert réutilise une intégrale déjà calculée ; la seconde méthode permet de vérifier le résultat à partir de la loi de Y elle-même.

Partie II : Étude d'un temps d'attente

1. a. Chaque indicatrice B_k vaut 1 si l'invité I_k est arrivé au plus tard à l'instant t , et 0 sinon. La somme S_t compte donc le nombre d'invités déjà arrivés à l'instant t .
- b. Pour $0 < t \leq 1$, la loi uniforme donne $P(T_k \leq t) = t$; ainsi B_k suit la loi de Bernoulli de paramètre t . À cet instant fixé, les événements $(T_k \leq t)$ sont mutuellement

indépendants par l'hypothèse du modèle : leurs indicatrices sont donc indépendantes. Leur somme suit une loi binomiale :

$$S_t \sim \mathcal{B}(n, t).$$

Pour $0 < t < 1$, sa loi s'écrit $P(S_t = j) = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}$ pour $j \in \{0, \dots, n\}$. Pour $t = 1$, toutes les indicatrices valent 1 presque sûrement et $S_1 = n$ presque sûrement ; c'est la loi binomiale dégénérée de paramètre 1, sans avoir à interpréter un produit contenant 0^0 .

2. a. La première arrivée est strictement postérieure à t si et seulement si aucun invité n'est arrivé au plus tard à t . On a donc l'égalité d'événements

$$(R_1 > t) = (S_t = 0).$$

Pour $0 < t < 1$, sa probabilité vaut $(1-t)^n$ d'après la loi binomiale. Pour $t = 1$, elle vaut 0, ce qui est encore la valeur de $(1-t)^n$.

- b. La variable R_1 prend ses valeurs dans $[0; 1]$ presque sûrement. Pour $0 < t < 1$, on passe à l'événement complémentaire dans II.2.a :

$$P(R_1 \leq t) = 1 - (1-t)^n.$$

À $t = 0$, la probabilité d'une arrivée exactement à 0 est nulle pour chaque invité, puisque sa loi est uniforme ; la réunion finie de ces événements est encore de probabilité nulle. À $t = 1$, tous sont arrivés presque sûrement. On obtient donc, sur tout $\mathbb{R}$,

$$F_{R_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ 1 - (1-t)^n & \text{si } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Cette fonction est continue en 0 et en 1, et de classe C^1 sur les autres intervalles. Ainsi R_1 admet pour densité

$$g_1(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elle est positive et son intégrale vaut $[-(1-t)^n]_0^1 = 1$, ce qui confirme sa normalisation. Ses limites latérales sont finies aux deux bornes.

3. La deuxième arrivée est strictement postérieure à t si et seulement si au plus un invité est arrivé au plus tard à t . Pour $0 < t < 1$, on a donc

$$(R_2 > t) = (S_t = 0) \cup (S_t = 1),$$

union de deux événements disjoints. D'après la loi binomiale,

$$P(R_2 > t) = (1-t)^n + nt(1-t)^{n-1}.$$

Comme $R_2 \in [0; 1]$ presque sûrement et qu'aucun invité n'arrive à 0 avec une probabilité positive, sa fonction de répartition est

$$F_{R_2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ 1 - (1-t)^n - nt(1-t)^{n-1} & \text{si } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

La formule centrale tend vers 0 lorsque $t \rightarrow 0^+$ et vers 1 lorsque $t \rightarrow 1^-$, car $n \geq 2$ implique $n-1 \geq 1$. Cette fonction de répartition est donc continue sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 hors de 0 et 1. Pour $0 < t < 1$, sa dérivée est

$$F'_{R_2}(t) = n(1-t)^{n-1} - n(1-t)^{n-1} + n(n-1)t(1-t)^{n-2} = n(n-1)t(1-t)^{n-2}.$$

Ainsi, R_2 admet pour densité

$$g_2(t) = \begin{cases} n(n-1)t(1-t)^{n-2} & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette densité est positive. Elle a des limites latérales finies, y compris lorsque $n = 2$, cas où la formule intérieure est simplement $2t$. Sa normalisation résulte des valeurs aux bornes de la primitive F_{R_2} : $\int_0^1 g_2(t) dt = F_{R_2}(1) - F_{R_2}(0) = 1$. Aucune formule générale sur les lois des temps d'arrivée n'a été supposée connue ; les deux densités ont été obtenues à partir du comptage binomial.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, partie I, préambule : le domaine de f est écrit $[0; +\infty[$ pour être cohérent avec la valeur $f(0) = 0$ explicitement donnée et la continuité demandée en I.1.
- Exercice 1, I.6.c : Question adaptée au programme actuel. Les limites à étudier et le vocabulaire «branche parabolique de direction l'axe des ordonnées» sont explicités, sans supposer un chapitre supplémentaire sur les branches infinies.
- Exercice 1, partie III, préambule et questions 1 à 3 : le domaine imprimé $]1; +\infty[^2$ est rectifié en $U =]1; +\infty[\times \mathbb{R}$; son caractère ouvert est indiqué. Cette rectification est nécessaire car $f(\alpha + 1) = f(\alpha - 1) < 0$, donc le point des questions 2 et 3 n'appartient pas au domaine original. La formule de Φ et les demandes sont conservées.