



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2007

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable.
2. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible et symétrique P , de première ligne $(1 \ 1 \ 1)$ et de deuxième ligne $(1 \ -1 \ 0)$, telles que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1} .
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n par ses éléments.
4. Soient u_0, v_0, w_0 trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.

On note $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne définie par la

relation de récurrence $X_n = AX_{n-1}$.

4.a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $X_n = A^n X_0$.

4.b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{3} + \left(u_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$v_n = \frac{1}{3} + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$w_n = \frac{1}{3} + \left(w_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

4.c. Déterminer les limites respectives u, v, w de u_n, v_n, w_n lorsque le nombre entier n tend vers l'infini.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = \sqrt{(u_n - u)^2 + (v_n - v)^2 + (w_n - w)^2}.$$

4.d. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $d_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

4.e. Déterminer un entier naturel n tel que $d_n \leq 10^{-2}$.

Exercice 2

Préliminaire

On donne $0,69 < \ln 2 < 0,70$.

On considère l'application $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par $g(x) = x^2 + \ln x$.

1. Montrer que g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule.

On note α l'unique solution de cette équation.

3. Montrer que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Partie A

On note $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et on considère l'application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln x.$$

- 1.a. Montrer que f est strictement croissante sur I .

1.b. Montrer que $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$.

1.c. En déduire que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.

2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+1} = f(u_n)$.

2.a. Calculer u_1 .

2.b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

2.c. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2.d. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite est le réel α .

Partie B

On considère l'application $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $F(x, y) = xe^y + y \ln x$. Le domaine $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1.a. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

1.b. Montrer que F admet un point critique et un seul, que l'on exprimera à l'aide du nombre réel α .

2. Est-ce que F admet un extremum local ?

Exercice 3

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout nombre réel x , par
 $f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

Montrer que f est une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.

2. On définit la variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante :
 l'événement $[Y = 0]$ est égal à l'événement $[X < 1]$ et, pour tout nombre entier strictement positif n , l'événement $[Y = n]$ est égal à l'événement $[n \leq X < n + 1]$.

2.a. Montrer, pour tout entier naturel n , que $P(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}$.

2.b. Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Y .

2.c. Recopier et compléter le programme ci-dessous pour qu'il simule la variable aléatoire Y .

La commande `rd.random()` renvoie un nombre pseudo-aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$. La commande `np.exp(x)` calcule e^x . La commande `print` affiche les valeurs indiquées.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

u = rd.random()

y = ...

while ...:

    ...

print("y vaut", y)
```

3. Soit U une variable de Bernoulli telle que $P(U = 1) = P(U = 0) = \frac{1}{2}$. On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes.

Soit la variable aléatoire $T = (2U - 1)Y$, produit des variables aléatoires $2U - 1$ et Y . Ainsi, T est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.

3.a. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance $E(T)$ et calculer $E(T)$.

3.b. Vérifier que $T^2 = Y^2$. En déduire que la variable aléatoire T admet une variance $V(T)$ et calculer $V(T)$.

3.c. Pour tout nombre entier relatif n , calculer la probabilité $P(T = n)$.

4. Soit la variable aléatoire $D = X - Y$. On note F_D la fonction de répartition de D .

4.a. Justifier que, pour tout $t \in]-\infty, 0[$, $F_D(t) = 0$ et que, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $F_D(t) = 1$.

4.b. Soit $t \in [0, 1[$. Exprimer l'événement $[D \leq t]$ à l'aide des événements $[n \leq X \leq n + t]$, $n \in \mathbb{N}$.

4.c. Pour tout nombre réel $t \in [0, 1[$ et pour tout nombre entier naturel n , calculer la probabilité $P(n \leq X \leq n + t)$.

4.d. Montrer que, pour tout $t \in [0, 1[$, $F_D(t) = \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}}$.

4.e. Montrer que D est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de D .