



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2007

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1. La matrice A est réelle et symétrique : ${}^tA = A$. Le résultat du programme selon lequel toute matrice symétrique réelle est diagonalisable s'applique. Ainsi, A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2. Posons $c_1 = {}^t(1, 1, 1)$, $c_2 = {}^t(1, -1, 0)$ et $c_3 = {}^t(1, 0, -1)$. Le calcul direct donne

$$Ac_1 = c_1, \quad Ac_2 = -\frac{1}{2}c_2, \quad Ac_3 = -\frac{1}{2}c_3.$$

Par exemple, $Ac_3 = {}^t(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$. Choisissons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice P est symétrique et possède les deux premières lignes demandées. Pour calculer son inverse sans déterminant, résolvons ${}^t(P(a, b, c)) = {}^t(x, y, z)$. Les deux dernières équations donnent $b = a - y$ et $c = a - z$. La première devient $3a - y - z = x$. Il existe donc une unique solution pour tout (x, y, z) , donnée par

$$a = \frac{x + y + z}{3}, \quad b = \frac{x - 2y + z}{3}, \quad c = \frac{x + y - 2z}{3}.$$

Ainsi, P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les trois égalités sur les colonnes s'écrivent $AP = PD$; en multipliant à droite par P^{-1} , on obtient $A = PDP^{-1}$.

3. Méthode 1 — Exploiter la diagonalisation

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les produits intermédiaires $P^{-1}P$ se simplifient, d'où $A^n = PD^nP^{-1}$. Posons $r_n = (-\frac{1}{2})^n$. Alors $D^n = \text{diag}(1, r_n, r_n)$ et

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & r_n & r_n \\ 1 & -r_n & 0 \\ 1 & 0 & -r_n \end{pmatrix}.$$

Le produit par l'inverse calculé ci-dessus donne

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2r_n & 1 - r_n & 1 - r_n \\ 1 - r_n & 1 + 2r_n & 1 - r_n \\ 1 - r_n & 1 - r_n & 1 + 2r_n \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 — Exploiter une identité matricielle simple

Soit J la matrice dont les neuf coefficients sont égaux à 1, et posons $B = J/3$. Chaque coefficient de J^2 est égal à 3, donc $B^2 = B$. On a $A = B - \frac{1}{2}(I_3 - B)$, avec $B(I_3 - B) = (I_3 - B)B = 0$ et $(I_3 - B)^2 = I_3 - B$.

Par récurrence, ces identités donnent $A^n = B + (-\frac{1}{2})^n(I_3 - B)$: la formule est vraie pour $n = 1$ et, en la multipliant par A , les termes croisés s'annulent et les deux termes restants sont B et $(-\frac{1}{2})^{n+1}(I_3 - B)$. Les coefficients diagonaux sont donc $(1 + 2r_n)/3$ et les autres $(1 - r_n)/3$, comme précédemment.

La première méthode réutilise les vecteurs propres. La seconde permet un calcul direct de toutes les puissances à partir de l'identité $J^2 = 3J$.

4.a. On procède par récurrence. Pour $n = 0$, $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$. Si $X_n = A^n X_0$, alors $X_{n+1} = AX_n = A^{n+1} X_0$. La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.b. Pour $n \geq 1$, la première ligne du produit donne

$$u_n = \frac{(1 + 2r_n)u_0 + (1 - r_n)(v_0 + w_0)}{3}.$$

Comme $v_0 + w_0 = 1 - u_0$, le numérateur vaut $1 - r_n + 3r_n u_0$. Ainsi,

$$u_n = \frac{1}{3} + \left(u_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

De la même façon, en utilisant respectivement $u_0 + w_0 = 1 - v_0$ et $u_0 + v_0 = 1 - w_0$, on obtient

$$v_n = \frac{1}{3} + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad w_n = \frac{1}{3} + \left(w_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour $n = 0$, ces trois expressions redonnent les trois valeurs initiales. Elles sont donc valables pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.c. La suite géométrique $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ converge vers 0, car sa raison est de valeur absolue strictement inférieure à 1. Les trois limites existent et sont

$$u = v = w = \frac{1}{3}.$$

4.d. En élevant les écarts précédents au carré, puis en prenant la racine carrée positive, on obtient

$$d_n = \frac{1}{2^n} \sqrt{\left(u_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(w_0 - \frac{1}{3}\right)^2}.$$

La somme sous la racine vaut $u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 - \frac{1}{3}$, puisque $u_0 + v_0 + w_0 = 1$. Or les nombres initiaux sont positifs ou nuls, donc

$$u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 \leq (u_0 + v_0 + w_0)^2 = 1.$$

Par conséquent, $d_n \leq 2^{-n} \sqrt{2/3} \leq 2^{-n} \times 2 = 1/2^{n-1}$, y compris pour $n = 0$. Cela établit la majoration demandée, et même une majoration plus précise.

4.e. Il suffit de choisir n tel que $2^{n-1} \geq 100$. Comme $2^7 = 128 \geq 100$, le choix $n = 8$ convient : $d_8 \leq 1/128 < 1/100 = 10^{-2}$. Il n'est pas demandé de trouver le plus petit entier possible.

Exercice 2

Préliminaire

1. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln x$ sont continues et dérivables sur $]0, +\infty[$. Ainsi, g y est continue et

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0.$$

La fonction g est donc strictement croissante sur cet intervalle. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $x^2 \rightarrow 0$ et $\ln x \rightarrow -\infty$, d'où $g(x) \rightarrow -\infty$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, x^2 et $\ln x$ tendent vers $+\infty$, d'où $g(x) \rightarrow +\infty$.

2. La continuité et les limites précédentes permettent d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : g s'annule au moins une fois sur $]0, +\infty[$. Sa stricte croissance assure qu'elle ne s'annule pas deux fois. Il existe donc un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$.

3. On a $g(1) = 1 > 0$ et $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \ln 2 < 0$, $25 - 0,69 < 0$. Par stricte croissance de g , son unique zéro vérifie $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Partie A

- 1.a. La fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert contenant I et

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4x} = \frac{4x - 2x^2 - 1}{4x}.$$

Pour $x \in I$, $4x > 0$ et $4x - 2x^2 - 1 = 1 - 2(x-1)^2 \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Ainsi, $f'(x) > 0$ sur

I et f est strictement croissante sur I .

1.b. Le calcul aux bornes donne

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{16} + \frac{\ln 2}{4}, \quad f(1) = \frac{3}{4}.$$

Comme $\ln 2 > 0$, $69 > 1/4$, on a $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{7}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$. La stricte croissance de f donne $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1)$ et $f(1) = 3/4 < 1$. Les quatre termes sont donc rangés dans l'ordre demandé.

1.c. Pour tout $x \in I$, la croissance de f donne $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(1)$. D'après la question précédente, ces deux bornes sont strictement comprises entre $1/2$ et 1 . Ainsi, $f(x) \in I$; en fait, $f(I) \subset]1/2, 1[$.

2.a. On a $u_1 = f(1) = 3/4$.

2.b. La propriété se démontre par récurrence. D'abord, $u_0 = 1 \in I$. Si $u_n \in I$, la stabilité établie en 1.c donne $u_{n+1} = f(u_n) \in I$. Ainsi, tous les termes sont définis et appartiennent à I .

2.c. Méthode 1 — Utiliser la croissance de la fonction d'itération

On a $u_1 = 3/4 < u_0 = 1$. Supposons $u_{n+1} < u_n$. Ces deux termes appartiennent à I ; la stricte croissance de f entraîne $u_{n+2} = f(u_{n+1}) < f(u_n) = u_{n+1}$. Par récurrence, la suite est strictement décroissante.

Méthode 2 — Comparer chaque terme au point fixe

L'égalité $g(\alpha) = 0$ donne $f(\alpha) = \alpha$. Comme $u_0 = 1 > \alpha$ et f est strictement croissante, $u_n > \alpha$ entraîne $u_{n+1} = f(u_n) > f(\alpha) = \alpha$. Donc $u_n > \alpha$ pour tout n .

Par ailleurs, $f(x) - x = -g(x)/4$. Pour $x > \alpha$, la croissance de g donne $g(x) > 0$, donc $f(x) < x$. En appliquant ceci à u_n , on obtient $u_{n+1} < u_n$ pour tout n .

La première méthode transmet l'ordre entre deux termes consécutifs; la seconde explique aussi pourquoi la suite reste au-dessus de sa future limite.

2.d. La suite est décroissante et minorée par $1/2$; le théorème de convergence monotone assure l'existence d'une limite $\ell \in I$. La fonction f est continue sur I , donc le passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ donne $\ell = f(\ell)$. Or

$$f(\ell) = \ell \iff \ell^2 + \ln \ell = 0.$$

L'unicité du zéro de g impose $\ell = \alpha$. Ainsi, $u_n \rightarrow \alpha$.

Partie B

1.a. Question adaptée au programme actuel : la nature ouverte du domaine est précisée dans l'énoncé.

Sur l'ouvert $O =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, les fonctions coordonnées, le logarithme de la première coordonnée et l'exponentielle de la seconde sont de classe C^2 . Les sommes et produits conservent cette propriété. Ainsi, F est de classe C^2 sur O , donc en particulier de classe C^1 .

Les dérivées partielles premières sont

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = e^y + \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = xe^y + \ln x.$$

1.b. Un point $(x, y) \in O$ est critique si et seulement si

$$e^y + \frac{y}{x} = 0, \quad xe^y + \ln x = 0.$$

Puisque $x > 0$, la première équation équivaut à $xe^y + y = 0$. En soustrayant les deux équations ainsi obtenues, on trouve $y = \ln x$. En reportant dans la seconde, on obtient $x^2 + \ln x = 0$, car $e^{\ln x} = x$. Donc $x = \alpha$ et $y = \ln \alpha$.

Réciproquement, pour $(x, y) = (\alpha, \ln \alpha)$, les deux équations sont satisfaites puisque $\alpha^2 + \ln \alpha = 0$. L'unique point critique est donc

$$C = (\alpha, \ln \alpha) = (\alpha, -\alpha^2).$$

2. Tout extremum local d'une fonction de classe C^1 sur un ouvert est un point critique. Il suffit donc de déterminer la nature du point C .

La fonction F est de classe C^2 sur l'ouvert O , comme justifié en 1.a. Ses dérivées secondes sont

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = e^y + \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = xe^y.$$

En utilisant $\ln \alpha = -\alpha^2$ et $e^{\ln \alpha} = \alpha$, la matrice hessienne au point critique vaut

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \frac{1}{\alpha} \\ \alpha + \frac{1}{\alpha} & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Étudions les signes de ses valeurs propres sans déterminant. Posons

$$b = \alpha + \frac{1}{\alpha} > 0, \quad m = \frac{1 + \alpha^2}{2}, \quad d = \frac{1 - \alpha^2}{2}, \quad c = \sqrt{d^2 + b^2} > 0.$$

On a $H = mI_2 + K$, où $K = \begin{pmatrix} d & b \\ b & -d \end{pmatrix}$. Un calcul direct sur les deux vecteurs non nuls

$v_+ = {}^t(b, c - d)$ et $v_- = {}^t(b, -c - d)$ donne

$$Kv_+ = cv_+, \quad Kv_- = -cv_-.$$

En effet, la première coordonnée de Kv_+ est $db + b(c - d) = bc$ et la seconde vaut $b^2 - d(c - d) = c^2 - dc = c(c - d)$. Pour v_- , les mêmes produits donnent $-bc$ et $c^2 + dc = -c(-c - d)$. Les deux valeurs propres distinctes de H sont donc $m + c$ et $m - c$.

On a $m + c > 0$. De plus,

$$c^2 - m^2 = d^2 + b^2 - m^2 = b^2 - \alpha^2 = 2 + \frac{1}{\alpha^2} > 0.$$

Comme $c > 0$ et $m > 0$, il s'ensuit que $c > m$, donc $m - c < 0$. Les valeurs propres de la hessienne sont non nulles et de signes opposés. Le critère du programme montre que C

est un point selle, et non un extremum local. Aucun autre point ne peut être un extremum local puisqu'il n'y a pas d'autre point critique. Ainsi, F n'admet aucun extremum local sur O .

Exercice 3

1. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, avec des limites finies à gauche et à droite en 0. Elle est donc continue sauf éventuellement au seul point 0 et satisfait le cadre des densités du programme.

Pour $b > 0$, $\int_0^b e^{-x} dx = 1 - e^{-b}$. En faisant tendre b vers $+\infty$, on obtient une intégrale convergente de valeur 1. Comme f est nulle sur $] -\infty, 0]$, il vient $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. Ainsi, f est une densité de probabilité; X suit la loi exponentielle de paramètre 1.

- 2.a. Pour $n = 0$, la définition et la nullité de la densité sur les réels négatifs donnent

$$P(Y = 0) = P(X < 1) = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}.$$

Pour $n \geq 1$, on intègre la densité sur l'intervalle de définition de $[Y = n]$:

$$P(Y = n) = \int_n^{n+1} e^{-x} dx = e^{-n} - e^{-(n+1)} = (1 - e^{-1})e^{-n}.$$

La formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les bornes ouvertes ou fermées ne modifient pas ces probabilités, car une variable à densité n'a aucun atome.

- 2.b. Posons $p = 1 - e^{-1} \in]0, 1[$ et $q = 1 - p = e^{-1}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y + 1 = k) = P(Y = k - 1) = pq^{k-1}.$$

Ainsi, $Y + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p , sur $\mathbb{N}^*$. Cette loi possède une espérance et une variance finies : $E(Y + 1) = 1/p$ et $V(Y + 1) = (1 - p)/p^2$. Les

transformations affines conservent l'existence de ces moments, d'où

$$E(Y) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p} = \frac{1}{e-1}, \quad V(Y) = \frac{q}{p^2} = \frac{e}{(e-1)^2}.$$

2.c. Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Un programme complété est :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

u = rd.random()
y = 0
while u >= 1 - np.exp(-(y + 1)):
    y = y + 1
print("y vaut", y)
```

La variable u contient l'unique tirage uniforme et y est un compteur entier initialisé à zéro. La boucle incrémente y tant que le tirage n'est pas inférieur au seuil $1 - e^{-(y+1)}$. Ces seuils croissent vers 1 ; pour tout $u < 1$, la boucle finit donc par s'arrêter. La commande finale affiche la valeur simulée.

Pour une variable uniforme idéale V sur $[0, 1[$, le compteur final vaut 0 si

$0 \leq V < 1 - e^{-1}$. Il vaut $n \geq 1$ si

$1 - e^{-n} \leq V < 1 - e^{-(n+1)}$.

La longueur de cet intervalle est $e^{-n} - e^{-(n+1)} = (1 - e^{-1})e^{-n}$. La valeur affichée possède donc la loi de Y , pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le code complété a été exécuté ; son comportement a également été contrôlé pour des tirages fixés. La justification de la loi repose sur ce calcul exact, et non sur une simulation.

3.a. Puisque U vaut 0 ou 1, on a $|2U - 1| = 1$ et donc $|T| = Y$. La variable Y possède une espérance finie ; il en résulte $E(|T|) = E(Y) < +\infty$, ce qui justifie l'existence de $E(T)$.

L'indépendance de U et Y entraîne celle de $2U - 1$ et Y . Le produit est intégrable ; on peut donc écrire

$$E(T) = E(2U - 1)E(Y) = (2E(U) - 1)E(Y) = 0,$$

car $E(U) = 1/2$. Ainsi, T est centrée.

3.b. Pour les deux valeurs possibles de U , $(2U - 1)^2 = 1$. Ainsi, $T^2 = (2U - 1)^2 Y^2 = Y^2$.

La variable Y possède un moment d'ordre deux fini, car son espérance et sa variance sont finies. Par conséquent, T possède également un moment d'ordre deux fini, donc une variance. La formule de Koenig-Huygens donne

$$V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2.$$

En remplaçant les deux moments de Y , il vient

$$V(T) = \frac{e}{(e-1)^2} + \frac{1}{(e-1)^2} = \frac{e+1}{(e-1)^2}.$$

3.c. Si $n > 0$, l'événement $[T = n]$ est $[U = 1] \cap [Y = n]$. L'indépendance donne

$$P(T = n) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})e^{-n}.$$

Si $n < 0$, l'événement $[T = n]$ est $[U = 0] \cap [Y = -n]$, d'où

$$P(T = n) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})e^n = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})e^{-|n|}.$$

Enfin, $T = 0$ si et seulement si $Y = 0$, car $2U - 1$ ne s'annule jamais. Par conséquent,

$$P(T = 0) = 1 - e^{-1}, \quad P(T = n) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})e^{-|n|} \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Le cas $n = 0$ doit être distingué : les deux valeurs de U y conduisent.

4.a. On a $X \geq 0$ presque sûrement, puisque la densité est nulle sur $] -\infty, 0[$. Si $0 \leq X < 1$, alors $Y = 0$ et $0 \leq D = X < 1$. Si $n \leq X < n + 1$ pour un entier $n \geq 1$, alors $Y = n$ et $0 \leq D = X - n < 1$. Ces cas couvrent $[X \geq 0]$.

Ainsi, $0 \leq D < 1$ presque sûrement. Il en résulte $F_D(t) = 0$ pour $t < 0$, et $F_D(t) = 1$ pour $t \geq 1$.

4.b. Fixons $t \in [0, 1[$. Sur $[n \leq X < n + 1]$, avec $n \geq 0$, on a $Y = n$ et donc $D \leq t$ si et seulement si $X \leq n + t$. La condition $t < 1$ assure que cette dernière borne reste strictement inférieure à $n + 1$. Ainsi, à un événement de probabilité nulle près,

$$[D \leq t] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [n \leq X \leq n + t].$$

Plus précisément, avec la définition de Y pour tout $X < 1$, l'égalité exacte d'événements est

$$[D \leq t] = [X < 0] \cup \bigcup_{n=0}^{+\infty} [n \leq X \leq n + t].$$

L'événement ajouté $[X < 0]$ est de probabilité nulle. Les intervalles $[n, n + t]$ sont deux à deux disjoints puisque $t < 1$.

4.c. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1[$, l'intégration de la densité donne

$$P(n \leq X \leq n + t) = \int_n^{n+t} e^{-x} dx = e^{-n} - e^{-(n+t)} = e^{-n}(1 - e^{-t}).$$

Pour $n = 0$, la valeur de f au seul point 0 ne change pas l'intégrale. Pour $t = 0$, l'intervalle se réduit à un point et les deux membres sont nuls. La formule couvre donc tous les cas demandés.

4.d. Par additivité dénombrable sur les événements disjoints de 4.b, et puisque $P(X < 0) = 0$, on obtient

$$F_D(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n \leq X \leq n + t) = (1 - e^{-t}) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}.$$

La série est géométrique, de raison $e^{-1} \in]0, 1[$ et de somme $1/(1 - e^{-1})$. Ainsi, pour tout $t \in [0, 1[$,

$$F_D(t) = \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}}.$$

4.e. La fonction de répartition complète s'écrit

$$F_D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}} & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, cette fonction est de classe C^1 . En 0, sa valeur et sa limite à droite sont 0, comme sa limite à gauche. En 1, sa limite à gauche est $(1 - e^{-1})/(1 - e^{-1}) = 1$, égale à sa valeur et à sa limite à droite. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement aux deux points 0 et 1.

La caractérisation du programme montre que D est une variable aléatoire à densité. Une densité est

$$f_D(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-1}} & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elle est positive, possède des limites unilatérales finies en tout point, et son intégrale vaut $\frac{1}{1 - e^{-1}} \int_0^1 e^{-t} dt = 1$. Les valeurs choisies aux bornes 0 et 1 sont sans effet sur la loi.

Relevé des adaptations

Exercice 2, partie B, 1.a : la nature ouverte du domaine est donnée dans l'énoncé, conformément au programme actuel. En B.2, l'énoncé est conservé ; la résolution utilise le gradient, la hessienne puis les signes de ses valeurs propres, établis sans déterminant.

Exercice 3, 2.c : Code adapté en Python. Le programme à compléter conserve un tirage uniforme unique, un compteur entier, une boucle conditionnelle et l'affichage du résultat ; les commandes utiles sont documentées dans le sujet.