



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2006

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.a. Quelles sont les valeurs propres de A ?

1.b. Déterminer une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre deux telles que $AM = MD$.

2.a. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.b. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que M appartient à E si et seulement si $z = 0$ et $y = t$.

2.c. Établir que (U, A) est une base de E .

2.d. Calculer le produit UA . Est-ce que UA est élément de E ?

3. On note $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par $f(M) = AM - MD$.

3.a. Vérifier que f est linéaire.

3.b. Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.

3.c. Quelle est la dimension de l'image de f ?

3.d. Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = M$. En déduire que 1 est valeur propre de f . Montrer que -1 est aussi valeur propre de f .

3.e. Est-ce que f est diagonalisable ?

3.f. Montrer que $f \circ f \circ f = f$.

Exercice 2

On note $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par

$$F(x, y) = (x - 1)(y - 2)(x + y - 6).$$

Le domaine $\mathbb{R}^2$ est un ouvert.

1.a. Montrer que $(4, 2)$ et $(2, 3)$ sont des points critiques de F .

1.b. Est-ce que F présente un extremum local au point $(4, 2)$? Est-ce que F présente un extremum local au point $(2, 3)$? On calculera les matrices hessiennes en ces points et on étudiera les signes de leurs valeurs propres, sans calcul de déterminant.

2. On note $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $\varphi(x) = x(x - 2)(2x - 5)$.

2.a. Montrer que, pour tout $x \in [4, +\infty[$, $(x - 2)(2x - 5) \geq 4$.

2.b. En déduire que, pour tout $x \in [4, +\infty[$, $\varphi(x) \geq 4x$ et $\varphi(x) \in [4, +\infty[$.

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = F(1 + u_n, u_n).$$

3.a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n à l'aide de la fonction φ .

3.b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4^{n+1}$. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$?

3.c. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{10}$.

4. On note $g : [4, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in [4, +\infty[$, par

$$g(x) = \frac{10}{\varphi(x)}.$$

4.a. Montrer que l'intégrale $\int_4^{+\infty} g(x) dx$ converge.

4.b. Trouver trois réels a, b, c tels que, pour tout $x \in [4, +\infty[$,

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{2x-5}.$$

4.c. Calculer $\int_4^{+\infty} g(x) dx$.

Exercice 3

Partie A

1. Soit U une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$.

1.a. Rappeler l'expression d'une densité de U .

1.b. En utilisant la définition de la variance de U , montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx \text{ est convergente et que}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F(x) = 1 - e^{-x^2}$ si $x > 0$.

2. Montrer que la fonction F définit une fonction de répartition d'une variable aléatoire dont on déterminera une densité f .

3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

3.a. Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et que $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3.b. Déterminer, pour tout réel y , la probabilité $P(X^2 \leq y)$. On distinguera les cas $y \leq 0$ et $y > 0$.

3.c. Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre. En déduire que X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$.

Partie B

Le paramètre p appartient à $]0, 1]$.

1. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p . Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = p(1 - p)^{k-1}$. Rappeler la valeur de l'espérance $E(Z)$ et celle de la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire Z .
2. Soient un entier $n \geq 2$ et n variables aléatoires indépendantes $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre p .

On considère la variable aléatoire $M_n = \frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n)$.

2.a. Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n .

2.b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(0 \leq M_n - m \leq \sigma_n)$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de

$\int_0^1 e^{-x^2/2} dx$. On distinguera le cas $0 < p < 1$ du cas $p = 1$.