



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2006

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1.a. La matrice A est triangulaire : ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc 0 et 1. On peut aussi les vérifier directement : $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs non nuls sont indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^2$; il n'y a donc pas d'autre valeur propre.

1.b. On choisit comme colonnes de P des vecteurs propres associés, dans l'ordre, à 0 et 1 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La multiplication donne $PP^{-1} = P^{-1}P = I_2$ et $AP = PD$. En multipliant la dernière égalité à droite par P^{-1} , on obtient bien $A = PDP^{-1}$.

2.a. La matrice nulle appartient à E . Si $M, N \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors, par distributivité des produits matriciels,

$$A(\alpha M + \beta N) = \alpha AM + \beta AN = \alpha MD + \beta ND = (\alpha M + \beta N)D.$$

Ainsi $\alpha M + \beta N \in E$. Cet ensemble non vide est stable par combinaisons linéaires : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.b. Calculons séparément les deux produits :

$$AM = \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix}, \quad MD = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

L'égalité des quatre coefficients équivaut aux conditions $z = 0$ et $t = y$, la dernière égalité étant automatiquement satisfaite. Par conséquent,

$$M \in E \iff z = 0 \text{ et } y = t.$$

2.c. D'après la question précédente,

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \{xU + yA : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

La famille (U, A) engendre donc E . Si $\alpha U + \beta A = 0$, la lecture du coefficient supérieur gauche donne $\alpha = 0$ et celle du coefficient supérieur droit donne $\beta = 0$. La famille est libre : c'est une base de E , et $\dim E = 2$.

2.d. Le produit vaut

$$UA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans cette matrice, le coefficient supérieur droit vaut 1 et le coefficient inférieur droit vaut 0 ; ils ne sont pas égaux. Le critère de 2.b montre que $UA \notin E$.

3.a. Pour $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha M + \beta N) = A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)D = \alpha f(M) + \beta f(N).$$

L'application f est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour traiter ensuite les éléments propres par une matrice concrète, notons E_{ij} la matrice ayant un seul coefficient égal à 1, en ligne i et colonne j , et tous les autres nuls. Dans la

base canonique $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, on a

$$f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z & t-y \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les égalités $f(M) = \lambda M$ correspondent ainsi exactement aux égalités $Hv = \lambda v$, où v est la colonne des coordonnées de M .

3.b. Par définition,

$$M \in \text{Ker } f \iff AM - MD = 0 \iff M \in E.$$

Ainsi $\text{Ker } f = E = \text{Vect}(U, A)$ et $\dim(\text{Ker } f) = 2$.

3.c. Méthode 1 — Théorème du rang

La dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est 4. Le théorème du rang appliqué à f donne

$$\dim(\text{Im } f) = 4 - \dim(\text{Ker } f) = 4 - 2 = 2.$$

Méthode 2 — Description de l'image

La formule de 3.a montre que toute image est de la forme $\begin{pmatrix} z & w \\ z & 0 \end{pmatrix}$, avec $w = t - y$.

Réciproquement, pour tous $z, w \in \mathbb{R}$, le choix $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & w \end{pmatrix}$ produit cette image. Ainsi

$$\text{Im } f = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Les deux matrices affichées sont indépendantes, donc l'image est de dimension 2. La première méthode exploite le noyau déjà connu ; la seconde fournit en plus une base explicite de l'image.

3.d. La formule de 3.a permet de résoudre sans déterminant :

$$f(M) = M \iff z = x, t - y = y, z = z, 0 = t.$$

Il s'ensuit $t = 0$, puis $y = 0$ et $z = x$. Les solutions sont donc

$$M = xJ, \quad x \in \mathbb{R}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $J \neq 0$ et $f(J) = J$, 1 est valeur propre, et l'espace propre associé est $\text{Vect}(J)$.

Posons $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie $f(K) = -K$ et $K \neq 0$: -1 est aussi valeur propre. Pour

préciser l'espace propre, l'équation $f(M) = -M$ donne $z = -x, t = 0$ et $z = -z$. Ainsi $z = x = 0$, tandis que y est libre. L'espace propre associé à -1 est donc $\text{Vect}(K)$. Ces calculs décrivent les espaces propres de la matrice H par les colonnes coordonnées correspondantes.

3.e. Les matrices U, A forment une base de l'espace propre associé à 0, et J, K sont des vecteurs propres associés à 1, -1 . Les familles libres d'espaces propres associés à des valeurs propres distinctes se concatènent en une famille libre. La famille (U, A, J, K) est

donc libre et comporte quatre matrices dans un espace de dimension quatre : c'est une base.

Explicitement, les colonnes coordonnées de cette famille constituent la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La liberté précédente justifie son inversibilité. Les calculs de 3.b et 3.d donnent

$$HS = S \operatorname{diag}(0, 0, 1, -1).$$

La matrice H est donc diagonalisable ; l'endomorphisme concret f l'est également, avec matrice diagonale $\operatorname{diag}(0, 0, 1, -1)$ dans la base (U, A, J, K) .

3.f. Méthode 1 — Calcul sur une matrice quelconque

En appliquant trois fois la formule de 3.a, pour tout $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$,

$$f(M) = \begin{pmatrix} z & t - y \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad f^2(M) = \begin{pmatrix} z & y - t \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad f^3(M) = \begin{pmatrix} z & t - y \\ z & 0 \end{pmatrix}.$$

Les première et dernière expressions sont égales pour toute matrice M , donc $f \circ f \circ f = f$.

Méthode 2 — Utilisation de la diagonalisation

Notons $\Delta = \text{diag}(0, 0, 1, -1)$. La question 3.e donne $H = S\Delta S^{-1}$. En multipliant et en simplifiant les facteurs $S^{-1}S$, on obtient $H^3 = S\Delta^3 S^{-1}$. Chaque coefficient diagonal $\lambda \in \{0, 1, -1\}$ vérifie $\lambda^3 = \lambda$, donc $\Delta^3 = \Delta$ et $H^3 = H$. Le lien entre composition et produit matriciel donne à nouveau $f^3 = f$. Le calcul direct fournit une vérification immédiate; la seconde méthode montre l'utilité de la base propre obtenue précédemment.

Exercice 2

1.a. La fonction F est polynomiale, donc de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Par la règle du produit,

$$\partial_1 F(x, y) = (y - 2)(2x + y - 7), \quad \partial_2 F(x, y) = (x - 1)(x + 2y - 8).$$

Au point $(4, 2)$, les facteurs $y - 2$ et $x + 2y - 8$ s'annulent. Au point $(2, 3)$, les facteurs $2x + y - 7$ et $x + 2y - 8$ s'annulent. Dans les deux cas le gradient est nul : $(4, 2)$ et $(2, 3)$ sont des points critiques.

1.b. Question adaptée au programme actuel : on utilise la hessienne et les signes de ses valeurs propres.

Méthode 1 — Hessiennes

En dérivant les expressions précédentes,

$$\nabla^2 F(x, y) = \begin{pmatrix} 2(y - 2) & 2x + 2y - 9 \\ 2x + 2y - 9 & 2(x - 1) \end{pmatrix}.$$

Au point $(4, 2)$, cette matrice vaut $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Pour chacun des deux choix $s = \sqrt{2}$ et

$s = -\sqrt{2}$, un calcul donne

$$H_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3s \\ 9+6s \end{pmatrix} = 3(1+s) \begin{pmatrix} 1 \\ 1+s \end{pmatrix},$$

car $s^2 = 2$. Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ sont indépendants : les valeurs propres sont $3 + 3\sqrt{2} > 0$ et $3 - 3\sqrt{2} < 0$. Le critère hessien, applicable puisque F est C^2 au voisinage du point critique, montre que $(4, 2)$ est un point selle. Il n'y a pas d'extremum local en ce point.

Au point $(2, 3)$, la hessienne vaut $H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a

$$H_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les deux vecteurs forment une base, et les valeurs propres sont 3 et 1, toutes deux strictement positives. La fonction F présente donc un minimum local strict en $(2, 3)$, de valeur $F(2, 3) = -1$.

Méthode 2 — Étude directe des différences de valeurs

Au point $(4, 2)$, la valeur est $F(4, 2) = 0$. Pour tout réel h non nul suffisamment petit,

$$F(4, 2+h) = 3h^2 > 0, \quad F\left(4+h, 2-\frac{h}{2}\right) = -\frac{(3+h)h^2}{4} < 0.$$

Ces deux familles de points tendent vers $(4, 2)$ et donnent des valeurs de part et d'autre de 0. Aucun voisinage ne peut donc définir un minimum ou un maximum local.

Au point $(2, 3)$, un développement algébrique exact du produit, sans formule de développement limité, donne

$$F(2+h, 3+k) - F(2, 3) = h^2 + hk + k^2 + hk(h+k).$$

On a $|hk| \leq (h^2 + k^2)/2$, car $(|h| - |k|)^2 \geq 0$. Par conséquent,

$$F(2+h, 3+k) - F(2, 3) \geq \frac{h^2 + k^2}{2} (1 - |h| - |k|).$$

Si $|h| + |k| < 1/2$ et $(h, k) \neq (0, 0)$, cette différence est strictement positive. Le minimum local est donc strict. La première méthode met en pratique le critère du programme; la seconde explique directement la variation des valeurs au voisinage des points critiques.

2.a. Si $x \geq 4$, alors $x - 2 \geq 2$ et $2x - 5 \geq 3$. Les deux facteurs étant positifs, $(x - 2)(2x - 5) \geq 6 \geq 4$, ce qui prouve l'inégalité demandée.

2.b. Comme $x \geq 4 > 0$, la multiplication de l'inégalité précédente par x donne $\varphi(x) \geq 4x$. De plus, $4x \geq 16 \geq 4$, donc $\varphi(x) \in [4, +\infty[$.

3.a. En substituant $x = 1 + u_n$ et $y = u_n$ dans F ,

$$u_{n+1} = u_n(u_n - 2)(2u_n - 5) = \varphi(u_n).$$

3.b. Montrons par récurrence que $u_n \geq 4^{n+1}$. Au rang 0, $u_0 = 4 = 4^1$. Si l'inégalité est vraie au rang n , alors $u_n \geq 4$ et la question 2.b s'applique :

$$u_{n+1} = \varphi(u_n) \geq 4u_n \geq 4 \times 4^{n+1} = 4^{n+2}.$$

La propriété est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$. En particulier, tous les termes sont strictement positifs et

$$0 < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{4^{n+1}}.$$

On peut conclure directement à partir des sommes partielles, sans faire appel à un critère de séries supplémentaire : pour $N \geq 0$, la somme

$$S_N = \sum_{n=0}^N \frac{1}{u_n}$$

croît avec N , et

$$S_N \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{N+1}} \right) \leq \frac{1}{3}.$$

La suite (S_N) est croissante et majorée, donc convergente. La série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{u_n}$$

converge.

3.c. Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Python

```
n = 0
u = 4
while u < 10**10:
    u = u * (u - 2) * (2 * u - 5)
    n = n + 1
print(n)
```

Au début de chaque passage dans la boucle, la variable u contient u_n . La mise à jour calcule exactement u_{n+1} , puis le compteur augmente de 1. La boucle parcourt les indices dans l'ordre et s'arrête au premier terme supérieur ou égal au seuil. La minoration de 3.b assure que le seuil sera atteint : le programme termine.

Les valeurs successives sont $u_0 = 4$, $u_1 = 24$, $u_2 = 22704$ et $u_3 = 23401896121824$. Ainsi $u_2 < 10^{10} \leq u_3$ et le programme affiche 3. Ce code a été exécuté ; les entiers Python permettent ici un calcul entier exact, sans arrondi.

4.a. Sur $[4, +\infty[$, le dénominateur de g est strictement positif, donc g est continue et positive. Pour $x \geq 4$, on a $x - 2 \geq x/2$ et $2x - 5 \geq 3x/4$. D'où

$$0 < g(x) = \frac{10}{x(x-2)(2x-5)} \leq \frac{80}{3x^3}.$$

Or, pour $R > 4$,

$$\int_4^R \frac{80}{3x^3} dx = \frac{40}{3} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{R^2} \right) \rightarrow \frac{5}{6}.$$

Par comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_4^{+\infty} g(x) dx$ converge.

4.b. Sur l'intervalle considéré, on peut multiplier par $x(x-2)(2x-5)$ sans annuler le dénominateur. L'égalité cherchée devient

$$10 = a(x-2)(2x-5) + bx(2x-5) + cx(x-2).$$

Le développement du membre de droite donne

$$(2a + 2b + c)x^2 + (-9a - 5b - 2c)x + 10a.$$

Il suffit donc de résoudre $2a + 2b + c = 0$, $-9a - 5b - 2c = 0$ et $10a = 10$. La dernière équation donne $a = 1$; la première donne $c = -2 - 2b$. En remplaçant dans la deuxième, $-9 - 5b + 4 + 4b = 0$, donc $b = -5$ et $c = 8$. Ces valeurs annulent bien les coefficients de x et x^2 , et donnent le terme constant 10. Ainsi

$$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{5}{x-2} + \frac{8}{2x-5}.$$

4.c. Les trois dénominateurs sont strictement positifs sur $[4, +\infty[$. Pour tout $R > 4$, l'intégration sur segment donne

$$\int_4^R g(x) dx = G(R) - G(4), \quad G(x) = \ln x - 5 \ln(x-2) + 4 \ln(2x-5).$$

Il faut regrouper les logarithmes avant de prendre la limite : les trois intégrales impropres séparées ne convergent pas. Écrivons

$$G(R) = 4 \ln 2 - 5 \ln \left(1 - \frac{2}{R}\right) + 4 \ln \left(1 - \frac{5}{2R}\right).$$

Les coefficients de $\ln R$ se sont annulés. Par continuité du logarithme en 1, $G(R) \rightarrow 4 \ln 2$. D'autre part,

$$G(4) = \ln 4 - 5 \ln 2 + 4 \ln 3 = -3 \ln 2 + 4 \ln 3.$$

En passant à la limite dans l'égalité sur segment,

$$\int_4^{+\infty} g(x) dx = 7 \ln 2 - 4 \ln 3 = \ln \left(\frac{128}{81}\right).$$

Exercice 3

Partie A

1.a. La variable U suit $\mathcal{N}(0, 1/2)$; son écart-type est $1/\sqrt{2}$. Une densité est donc

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.b. Comme $E(U) = 0$, la définition de la variance donne l'existence du moment d'ordre deux et

$$\frac{1}{2} = V(U) = E(U^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

L'intégrande est positive et paire. L'intégrale sur $[0, +\infty[$ converge donc, et vaut la moitié de l'intégrale totale. Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

2. Sur $] -\infty, 0]$, F est constante égale à 0. Sur $]0, +\infty[$,

$$F'(x) = 2xe^{-x^2} > 0.$$

La limite à droite en 0 vaut $1 - e^0 = 0 = F(0)$: F est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est croissante sur tout $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. Elle est donc une fonction de répartition. Elle est de classe C^1 en dehors, au plus, du point 0, ce qui suffit à obtenir une variable à densité. Une densité est

$$f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0, \quad f(x) = 2xe^{-x^2} \text{ si } x > 0.$$

Cette densité a des limites finies à gauche et à droite en chaque point; en particulier, ses deux limites en 0 sont nulles. Pour vérifier directement sa normalisation, pour $R > 0$,

$$\int_0^R 2xe^{-x^2} dx = [-e^{-x^2}]_0^R = 1 - e^{-R^2} \rightarrow 1.$$

3.a. La densité étant nulle sur $] -\infty, 0]$, on a $X > 0$ presque sûrement. L'intégrale définissant l'espérance est donc absolument convergente si $\int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2} dx$ converge. C'est précisément le résultat de 1.b, multiplié par 2. Ainsi X admet une espérance et

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3.b. Pour $y < 0$, l'événement $[X^2 \leq y]$ est impossible. Pour $y = 0$, il est égal à $[X = 0]$, de probabilité nulle puisque X est à densité. Si $y > 0$, comme $X \geq 0$ presque sûrement,

$$P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) = 1 - e^{-y}.$$

Finalement,

$$P(X^2 \leq y) = 0 \text{ si } y \leq 0, \quad P(X^2 \leq y) = 1 - e^{-y} \text{ si } y > 0.$$

3.c. La fonction de répartition précédente est celle d'une loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi $X^2 \sim \mathcal{E}(1)$, et $E(X^2) = 1$ est fini. Puisque l'espérance de X existe par 3.a, X admet une variance. La formule de Koenig-Huygens donne

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4 - \pi}{4}.$$

Partie B

1. Pour la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0, 1]$, les moments usuels existent et valent

$$E(Z) = \frac{1}{p}, \quad V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Pour $p = 1$, la loi est certaine : $Z = 1$ presque sûrement, d'où les mêmes formules, avec une variance nulle.

2.a. Chaque Z_i admet les moments rappelés en 1. La linéarité de l'espérance donne

$$m = E(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(Z_i) = \frac{1}{p}.$$

L'indépendance des Z_i permet d'additionner les variances, puis de tenir compte du

facteur $1/n$:

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(Z_i) = \frac{1-p}{np^2}.$$

L'écart-type, racine carrée positive de la variance, est donc

$$\sigma_n = \frac{\sqrt{1-p}}{p\sqrt{n}}.$$

2.b. Question adaptée au programme actuel : le cas de variance nulle est distingué explicitement.

Supposons d'abord $0 < p < 1$. Les variables Z_i sont indépendantes, de même loi, et admettent une variance $v = (1-p)/p^2$ finie et strictement positive. Le théorème limite central s'applique donc aux moyennes empiriques. La variable centrée réduite

$$T_n = \frac{M_n - m}{\sigma_n} = \frac{\sqrt{n}(M_n - m)}{\sqrt{v}}$$

converge en loi vers une variable $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Si G_n désigne la fonction de répartition de T_n et Φ celle de T , on a $G_n(t) \rightarrow \Phi(t)$ en tout réel t , puisque Φ est continue.

Il faut veiller à la borne inférieure de l'événement, car T_n est discrète. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$G_n(1) - G_n(0) \leq P(0 \leq T_n \leq 1) \leq G_n(1) - G_n(-\varepsilon).$$

La première différence est la probabilité de $[0 < T_n \leq 1]$; la seconde est celle de $[-\varepsilon < T_n \leq 1]$. En passant aux limites inférieure et supérieure, puis en faisant tendre ε vers 0, la continuité de Φ donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(0 \leq T_n \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2} dx.$$

Comme $\sigma_n > 0$, les événements $[0 \leq M_n - m \leq \sigma_n]$ et $[0 \leq T_n \leq 1]$ sont égaux. C'est donc la limite demandée lorsque $0 < p < 1$.

Si $p = 1$, toutes les variables Z_i valent 1 presque sûrement ; alors $M_n = m = 1$ et $\sigma_n = 0$. L'événement demandé est certain pour tout n , et sa probabilité a pour limite 1. Aucune division par un écart-type nul n'est effectuée.

Relevé des adaptations

Exercice 2, préambule et 1.b : la nature ouverte du domaine $\mathbb{R}^2$ est précisée ; l'étude des extrema est guidée par les hessiennes et les signes de leurs valeurs propres, selon la méthode du programme actuel.

Exercice 2, 3.c : Code adapté en Python. La demande de programmation conserve exactement son objectif, le premier indice pour lequel

$$u_n \geq 10^{10}.$$

Exercice 3, partie B, préambule et 2.b : le domaine $p \in]0, 1]$ est explicité et le cas $p = 1$ est distingué. Cela conserve la loi géométrique dégénérée et évite d'utiliser le théorème limite central avec une variance nulle.