



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2005

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1. Par définition, (I, J, K) engendrent E . Pour tester sa liberté, on écrit :

$$aI + bJ + cK = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Si cette matrice est nulle, ses coefficients $(1, 1)$, $(1, 2)$ et $(1, 3)$ donnent successivement $a = b = c = 0$. La famille est donc libre et génératrice ; c'est une base de E , d'où $\dim E = 3$.

2. Le produit matriciel donne :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K, \quad JK = KJ = K^2 = 0.$$

En particulier, $J^3 = JK = 0$ et toute puissance de J d'exposant au moins trois est nulle.

3.a. Méthode 1 — Récurrence

Pour $n = 0$, la formule donne $L^0 = I$. Supposons-la vraie à l'entier $n \geq 0$. En utilisant les produits de la question 2 :

$$L^{n+1} = \left(I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K \right) (I + J) = I + (n+1)J + \left(n + \frac{n(n-1)}{2} \right) K.$$

Puisque $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$, la formule est vraie au rang $n+1$. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

Méthode 2 — Binôme matriciel

Les matrices I et J commutent. Le binôme donne

$$(I + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k.$$

Pour $n \geq 2$, seuls les termes d'indices 0, 1 et 2 peuvent être non nuls, d'où

$L^n = I + nJ + n(n-1)K/2$. Pour $n = 0$ et $n = 1$, on vérifie la même formule directement.

La récurrence s'appuie sur la multiplication par L ; le binôme exploite la disparition des puissances de J à partir de l'exposant trois.

3.b. On vérifie directement :

$$(I + J)(I - J + K) = I + J - J - J^2 + K + JK = I.$$

Ainsi L est inversible et $L^{-1} = I - J + K$. Pour $m \geq 0$, établissons par récurrence :

$$(L^{-1})^m = I - mJ + \frac{m(m+1)}{2}K.$$

La formule est vraie pour $m = 0$. Si elle est vraie au rang m , la multiplication par $I - J + K$ donne un coefficient de J égal à $-(m+1)$ et un coefficient de K égal à $1 + m + m(m+1)/2 = (m+1)(m+2)/2$; tous les autres produits non constants s'annulent selon la question 2. Elle est donc vraie au rang $m+1$.

Pour $n = -m \leq 0$, on obtient $L^n = I + nJ + n(n-1)K/2$. Avec 3.a, cette égalité est établie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3.c. Puisque $J = L - I$ et $L^2 = I + 2J + K$, on a $K = L^2 - 2L + I$. En substituant ces expressions dans la formule précédente :

$$L^n = I + n(L - I) + \frac{n(n-1)}{2}(L^2 - 2L + I).$$

En regroupant les trois matrices, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$L^n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}I + n(2-n)L + \frac{n(n-1)}{2}L^2.$$

4. Travaillons sur la matrice A . Posons $N = A - I$. Un produit direct donne :

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

En effet, la première ligne de N^2N est la somme de la première ligne de N , de l'opposée de sa deuxième et de sa troisième : elle est nulle ; la deuxième ligne est nulle et la troisième est l'opposée de la première.

Si λ est une valeur propre et $z \neq 0$ un vecteur propre, alors $Nz = (\lambda - 1)z$, puis $N^3z = (\lambda - 1)^3z$. On en déduit $(\lambda - 1)^3 = 0$, donc $\lambda = 1$.

Réciproquement, $A(1, 0, -1) = (1, 0, -1)$; la valeur 1 est donc effectivement propre et c'est la seule. Si A était diagonalisable, sa matrice diagonale semblable aurait uniquement des 1 sur la diagonale, donc serait I . On aurait alors $A = PIP^{-1} = I$, ce qui est faux. Ainsi f n'est pas diagonalisable.

5.a. Avec $N = A - I$, on calcule :

$$v = Nw = (-1, 1, 2), \quad u = Nv = (1, 0, -1).$$

Pour établir la liberté, supposons $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Les coordonnées donnent :

$$\alpha - \beta + \gamma = 0, \quad \beta = 0, \quad -\alpha + 2\beta = 0.$$

Ainsi $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$, puis $\gamma = 0$. Les trois vecteurs sont libres dans $\mathbb{R}^3$, de dimension trois ; ils forment donc une base.

5.b. On a $Nu = 0$, $Nv = u$ et $Nw = v$. Il vient $f(u) = u$, $f(v) = u + v$ et $f(w) = v + w$. Les

colonnes de la matrice dans la base (u, v, w) sont donc :

$$\text{Mat}_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L.$$

5.c. La matrice de f dans cette base est L , inversible d'après 3.b ; f est donc un

automorphisme. Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, matrice dont les colonnes sont u, v, w dans

la base canonique. Elle est inversible puisque ces vecteurs forment une base, et $A = PLP^{-1}$. Pour tout entier relatif n , $A^n = PL^nP^{-1}$, y compris pour les exposants négatifs puisque $A^{-1} = PL^{-1}P^{-1}$.

En appliquant la formule de 3.c et en multipliant par P et P^{-1} :

$$A^n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}I + n(2-n)A + \frac{n(n-1)}{2}A^2.$$

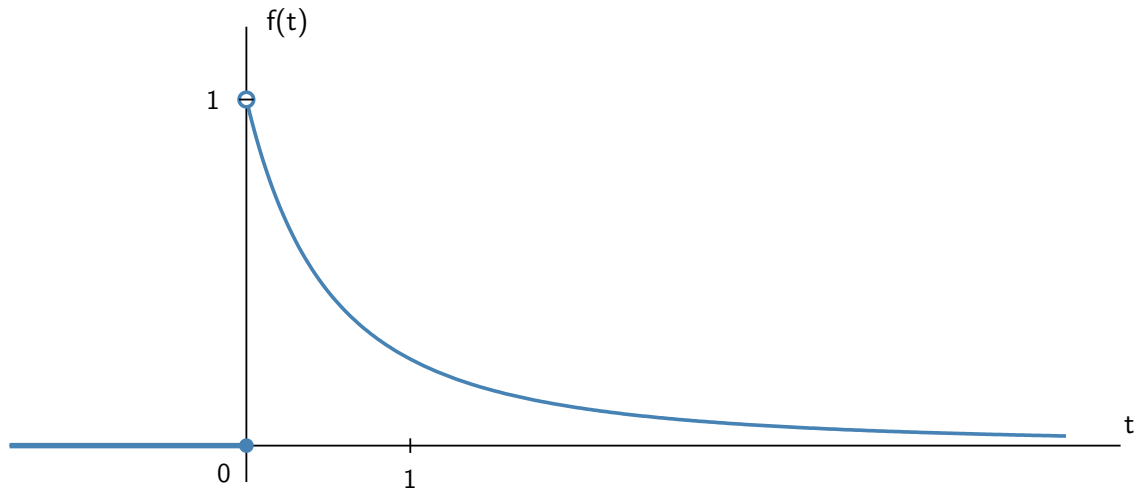
Le passage des matrices aux applications associées donne finalement :

$$f^n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}e + n(2-n)f + \frac{n(n-1)}{2}f^2 \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Exercice 2

1. Sur $] -\infty, 0]$, la courbe est l'axe des abscisses. Sur $]0, +\infty[$, on a

$f'(t) = -2/(t+1)^3 < 0$ et $f''(t) = 6/(t+1)^4 > 0$: la courbe est strictement décroissante et convexe. Elle tend vers 1 lorsque $t \rightarrow 0^+$, alors que $f(0) = 0$, puis vers 0 à l'infini. L'axe des abscisses est asymptote à droite.



Le point $(0, 1)$ est exclu de la courbe ; le point $(0, 0)$ en fait partie.

2. La fonction f est positive, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et possède des limites finies à gauche et à droite de zéro. Pour $b > 0$:

$$\int_0^b \frac{dt}{(t+1)^2} = \left[-\frac{1}{t+1} \right]_0^b = 1 - \frac{1}{b+1}.$$

En faisant tendre b vers $+\infty$, on obtient une intégrale convergente de valeur 1. Comme f est nulle sur $] -\infty, 0]$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$. Les critères de caractérisation d'une densité sont donc satisfaits.

3. Pour $x \leq 0$, l'intégrale est nulle puisque l'intégrande l'est sur tout l'intervalle. Pour $x > 0$, la partie de $-\infty$ à zéro est nulle, et le calcul sur $[0, x]$ donne :

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

L'intégrale converge dans les deux cas. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, notamment en zéro.

4. Pour $\alpha \geq 0$, la question précédente donne $\int_0^\alpha f(t) dt = \alpha/(1 + \alpha)$. L'équation cherchée équivaut à $2\alpha = 1 + \alpha$, donc $\alpha = 1$. Cette valeur est bien positive et vérifie l'égalité.

5.a. Une intégrale dont les deux bornes sont égales est nulle : $\varphi_x(0) = 0$. Par la relation de Chasles, $\varphi_x(u) = F(x + u) - F(x - u)$. Lorsque $u \rightarrow +\infty$, $x + u \rightarrow +\infty$ et $x - u \rightarrow -\infty$, donc $F(x + u) \rightarrow 1$ et $F(x - u) \rightarrow 0$. Ainsi :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi_x(u) = 1.$$

5.b. Pour $0 \leq u < v$, Chasles donne :

$$\varphi_x(v) - \varphi_x(u) = \int_{x-u}^{x-v} f(t) dt + \int_{x+u}^{x+v} f(t) dt.$$

Le premier terme est positif ou nul. Comme $x + u \geq 0$ et $x + v > x + u$, le second vaut :

$$\int_{x+u}^{x+v} f(t) dt = \frac{1}{x + u + 1} - \frac{1}{x + v + 1} > 0.$$

On obtient l'inégalité demandée, puis $\varphi_x(v) > \varphi_x(u)$. La fonction est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

5.c. La continuité est admise dans l'énoncé ; elle résulte aussi de l'expression à l'aide de F . La limite égale à 1 assure l'existence d'un réel $b > 0$ tel que $\varphi_x(b) > 1/2$. Puisque $\varphi_x(0) = 0$, le théorème des valeurs intermédiaires sur $[0, b]$ fournit une solution de $\varphi_x(u) = 1/2$. La stricte croissance prouve son unicité sur $[0, +\infty[$. Cette solution, notée $U(x)$, est strictement positive.

Rectification de la définition qui suit 5.c : le PDF écrit une fois $\varphi_x(u) = 0$ pour définir $U(x)$. Il faut lire $\varphi_x(u) = 1/2$, comme dans 5.c et dans l'intégrale affichée immédiatement après. La version du sujet utilise cette définition cohérente.

6.a. Fixons $0 \leq x < 1/2$ et posons $u = 1 - x > 0$. Alors $x - u = 2x - 1 < 0$ et $x + u = 1$. Ainsi :

$$\varphi_x(1 - x) = \int_{2x-1}^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Par l'unicité démontrée en 5.c, $U(x) = 1 - x$.

6.b. Pour $x \geq 1/2$:

$$\varphi_x(x) = \int_0^{2x} f(t) dt = \frac{2x}{2x+1} \geq \frac{1}{2}.$$

La stricte croissance et $\varphi_x(U(x)) = 1/2$ donnent $U(x) \leq x$, donc $x - U(x) \geq 0$. On peut dès lors calculer les deux bornes par la formule positive de F . En notant $u = U(x)$:

$$\frac{1}{x-u+1} - \frac{1}{x+u+1} = \frac{1}{2}.$$

Les deux dénominateurs sont strictement positifs puisque $0 \leq u \leq x$. En réduisant au même dénominateur :

$$\frac{2u}{(x+1)^2 - u^2} = \frac{1}{2} \implies u^2 + 4u - (x+1)^2 = 0.$$

Les deux racines sont $-2 \pm \sqrt{4 + (x+1)^2}$. La racine avec le signe moins est négative, alors que $u > 0$. Il reste donc :

$$U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2.$$

7.a. Chacune des deux expressions est continue sur son intervalle de définition. Au raccordement, $1 - 1/2 = 1/2$ et $\sqrt{4 + (3/2)^2} - 2 = 5/2 - 2 = 1/2$. Les limites à gauche et à droite coïncident donc avec $U(1/2)$. Ainsi U est continue sur $[0, +\infty[$.

7.b. Sur $]0, 1/2[$, $U'(x) = -1$. Sur $]1/2, +\infty[$, les règles de dérivation donnent :

$$U'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{4 + (x+1)^2}}.$$

Au point $1/2$, la dérivée à gauche vaut -1 et la dérivée à droite vaut $(3/2)/(5/2) = 3/5$. Elles sont distinctes ; U n'est pas dérivable en $1/2$. À l'extrémité zéro, U est dérivable à droite, de dérivée -1 . Ces précisions décrivent la dérivabilité sur tout le domaine.

7.c. Pour $x \geq 1/2$, la quantité $x+1$ est positive. En utilisant l'expression conjuguée, entièrement réelle :

$$U(x) - (x-1) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - (x+1) = \frac{4}{\sqrt{4 + (x+1)^2} + x+1}.$$

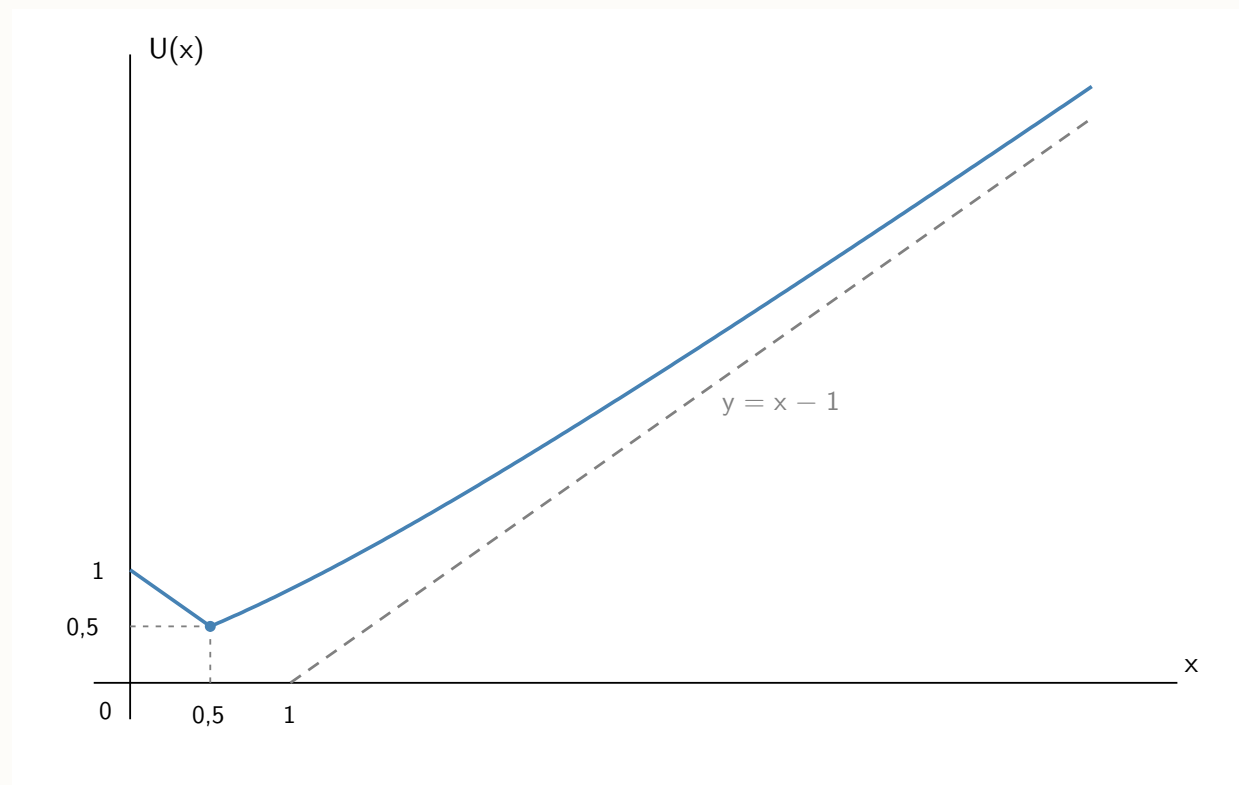
Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc la différence tend vers zéro. La droite $y = x - 1$

est asymptote à la courbe à $+\infty$. La différence est strictement positive : la courbe est au-dessus de cette droite.

7.d. Sur $[0, 1/2]$, la courbe est le segment joignant $(0, 1)$ à $(1/2, 1/2)$. À partir de $1/2$, elle est strictement croissante, car la dérivée de 7.b est positive. On a aussi, pour $x > 1/2$:

$$U''(x) = \frac{4}{(4 + (x + 1)^2)^{3/2}} > 0.$$

La branche de droite est convexe et se rapproche de l'asymptote $y = x - 1$ en restant au-dessus. Le point $(1/2, 1/2)$ est un minimum global anguleux ; les demi-tangentes y ont pour pentes -1 et $3/5$.



8.a. La fonction $x \mapsto \sqrt{4 + (x + 1)^2} - 2$ est croissante sur $[1/2, +\infty[$ et sa valeur en $1/2$ est $1/2$. Elle laisse donc cet intervalle invariant. Comme $a_0 = 1 \geq 1/2$, la relation $a_{n+1} = U(a_n)$ et une récurrence donnent $a_n \geq 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8.b. Pour $x \geq 1/2$, les quantités $\sqrt{4 + (x + 1)^2}$ et $x + 2$ sont positives. On peut comparer leurs carrés :

$$U(x) \leq x \iff 4 + (x + 1)^2 \leq (x + 2)^2 \iff 1 \leq 2x.$$

Cette dernière inégalité est vraie. Ainsi $a_{n+1} = U(a_n) \leq a_n$ et la suite est décroissante.

8.c. Méthode 1 — Monotonie et point fixe

La suite décroissante est minorée par $1/2$, donc converge vers un réel $\ell \geq 1/2$. La continuité de U permet de passer à la limite dans $a_{n+1} = U(a_n)$:

$$\ell = \sqrt{4 + (\ell + 1)^2} - 2.$$

Comme $\ell + 2 > 0$, on élève au carré et on obtient $(\ell + 2)^2 = 4 + (\ell + 1)^2$, soit $2\ell = 1$. Ainsi $\ell = 1/2$.

Méthode 2 — Encadrement de l'erreur

Les questions précédentes donnent $1/2 \leq a_n \leq 1$. Pour $x \in [1/2, 1]$, le taux de variation de la branche de droite vérifie $0 < U'(x) \leq 1/\sqrt{2}$. En effet, pour $y = x + 1 \leq 2$, $y^2/(4 + y^2) \leq 1/2$. Les inégalités des accroissements finis, appliquées à la fonction $g(x) = \sqrt{4 + (x + 1)^2} - 2$ sur $[1/2, 1]$, donnent :

$$0 \leq a_{n+1} - \frac{1}{2} = g(a_n) - g(1/2) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_n - \frac{1}{2} \right).$$

Par récurrence, $0 \leq a_n - 1/2 \leq (1/2)(1/\sqrt{2})^n$, dont le majorant tend vers zéro. La suite converge donc vers $1/2$. La première méthode identifie le point fixe après existence de la limite ; la seconde fournit en plus une borne quantitative de l'erreur.

8.d. Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Puisque tous les termes sont au moins égaux à $1/2$, on emploie la formule de la branche de droite pour chaque mise à jour.

Python

```
from math import sqrt

a = 1.0
n = 0
while abs(a - 0.5) > 1e-6:
```

```
a = sqrt(4 + (a + 1)**2) - 2
n = n + 1
print(n)
```

Au début de chaque test, a contient le terme d'indice n . La convergence vers $1/2$ assure que la boucle s'arrête ; comme elle examine les indices dans l'ordre à partir de zéro, le premier indice accepté est le plus petit. Le code exécuté affiche 27. En calcul flottant, $a_{26} \simeq 0,500001111553$ et $a_{27} \simeq 0,500000666932$: le seuil est franchi entre ces deux indices.

Exercice 3

1. Préliminaire

1.a. Le succès a pour probabilité $1 - x \in]0, 1[$. Chaque temps d'attente d'un succès suit une loi géométrique de paramètre $1 - x$ sur $\mathbb{N}^*$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 1$:

$$P(T_n = k) = x^{k-1}(1 - x), \quad E(T_n) = \frac{1}{1 - x}, \quad V(T_n) = \frac{x}{(1 - x)^2}.$$

Les deux moments sont ceux de la loi géométrique ; ils sont finis. Pour rendre explicite la justification de cette même loi après les succès précédents, fixons des entiers $k_1, \dots, k_n \geq 1$. L'événement $\{T_1 = k_1, \dots, T_n = k_n\}$ impose successivement $k_1 - 1$ échecs puis un succès, puis $k_2 - 1$ échecs et un succès, et ainsi de suite. L'indépendance des épreuves donne :

$$P(T_1 = k_1, \dots, T_n = k_n) = (1 - x)^n x^{k_1 + \dots + k_n - n}.$$

En sommant sur tous les indices sauf l'un, on utilise

$$\sum_{k \geq 1} (1 - x)x^{k-1} = 1$$

et on retrouve pour chaque T_j la loi indiquée. Les sommes concernées sont à termes positifs.

Les temps d'attente sont finis presque sûrement. Par exemple, pour $m \geq n$, l'événement $\{S_n > m\}$ signifie que les m premières épreuves comportent au plus $n - 1$ succès. Sa probabilité est

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{m}{j} (1-x)^j x^{m-j}.$$

Chaque terme tend vers zéro : pour j fixé, $\binom{m}{j} \leq m^j / j!$ et une puissance de m multipliée par x^m tend vers zéro lorsque $0 < x < 1$. Il n'y a donc pas de masse de probabilité perdue à un temps d'attente infini.

1.b. La formule jointe obtenue en 1.a se factorise, pour tous $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(T_1 = k_1, \dots, T_n = k_n) = \prod_{j=1}^n ((1-x)x^{k_j-1}) = \prod_{j=1}^n P(T_j = k_j).$$

Cette factorisation des probabilités jointes prouve l'indépendance mutuelle de $T_1, \dots, T_n$. Elle justifie rigoureusement l'utilisation des blocs d'attente successifs, dont les positions dépendent des succès précédents.

1.c. Chacune des variables T_j possède un moment d'ordre deux fini. Leur somme finie S_n admet donc une espérance et une variance. Par linéarité de l'espérance, puis par additivité des variances des variables indépendantes :

$$E(S_n) = \sum_{j=1}^n E(T_j) = \frac{n}{1-x}, \quad V(S_n) = \sum_{j=1}^n V(T_j) = \frac{nx}{(1-x)^2}.$$

1.d. Pour obtenir le n -ième succès au rang k , il faut $k \geq n$, exactement $n - 1$ succès parmi les $k - 1$ premières épreuves, puis un succès à la k -ième. Le nombre de positions possibles pour les $n - 1$ premiers succès est $\binom{k-1}{n-1}$. Chaque configuration comporte n succès et $k - n$ échecs, d'où :

$$P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} (1-x)^n x^{k-n} \quad (k \geq n).$$

Pour $k < n$, la probabilité est nulle. Chaque entier $k \geq n$ est de probabilité strictement positive, et S_n est fini presque sûrement. La somme

$$\sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n = k)$$

vaut donc 1, par normalisation d'une loi de probabilité, sans calcul de série supplémentaire.

1.e. La normalisation de 1.d s'écrit :

$$1 = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^n x^{k-n} = \frac{(1-x)^n}{x^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k.$$

Le facteur $(1-x)^n/x^n$ est strictement positif. En le divisant, on obtient la convergence et la valeur :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}.$$

2.a. Question adaptée au programme actuel : l'indépendance de tous les lancers des deux joueurs est explicitée dans le préambule, afin de préciser le modèle nécessaire à la loi conditionnelle.

Le nombre de lancers de A avant le premier pile suit la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$:

$$P(X = k) = pq^{k-1} \quad (k \geq 1).$$

Pour tout $k \geq 1$, cette probabilité est strictement positive. Sachant $X = k$, le joueur B effectue k lancers indépendants, chacun donnant pile avec probabilité p . Par l'indépendance avec les lancers de A , Y suit conditionnellement la loi binomiale $\mathcal{B}(k, p)$:

$$P(Y = j \mid X = k) = \binom{k}{j} p^j q^{k-j} \quad (0 \leq j \leq k),$$

et cette probabilité est nulle pour les autres entiers j .

2.b. Le nombre de piles est un entier positif ou nul. Pour obtenir zéro, l'événement $\{X = 1, Y = 0\}$ a probabilité $pq > 0$. Pour tout entier $j \geq 1$, l'événement $\{X = j, Y = j\}$ a probabilité $pq^{j-1}p^j > 0$. Par conséquent toutes les valeurs de $\mathbb{N}$ sont possibles et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

2.c. La famille des événements $\{X = k\}$, $k \geq 1$, est un système complet à événements de probabilités positives. La formule des probabilités totales donne :

$$P(Y = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P(Y = 0 \mid X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}q^k = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1}.$$

Comme $0 < q < 1$, on a $0 < q^2 < 1$; c'est une série géométrique convergente :

$$P(Y = 0) = pq \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = \frac{pq}{1 - q^2} = \frac{q}{1 + q},$$

car $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(1 + q)$ et $p > 0$.

2.d. Fixons $n \geq 1$. Pour $k < n$, la loi conditionnelle donne une probabilité nulle. Les probabilités totales fournissent :

$$P(Y = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} pq^{k-1} \binom{k}{n} p^n q^{k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}.$$

Appliquons 1.e avec le paramètre $x = q^2 \in]0, 1[$ et l'entier $n + 1$. On obtient :

$$\sum_{j=n+1}^{+\infty} \binom{j-1}{n} (q^2)^j = \frac{(q^2)^{n+1}}{(1 - q^2)^{n+1}}.$$

En posant $j = k + 1$ et en divisant par $q^2 > 0$, il vient :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} (q^2)^k = \frac{q^{2n}}{(1 - q^2)^{n+1}}.$$

On peut alors factoriser les constantes dans la série précédente :

$$P(Y = n) = p^{n+1} q^{-n-1} \frac{q^{2n}}{(1 - q^2)^{n+1}} = \frac{q^{n-1}}{(1 + q)^{n+1}} = \frac{1}{(1 + q)^2} \left(\frac{q}{1 + q} \right)^{n-1}.$$

Toutes les divisions sont légitimes puisque $p, q > 0$. Pour contrôler la normalisation, la somme de cette dernière expression sur $n \geq 1$ est $1/(1 + q)$; en ajoutant la masse $q/(1 + q)$ obtenue en zéro, on retrouve 1.

Relevé des adaptations

Exercice 2, définition de U après 5.c : rectification de la coquille $\varphi_x(u) = 0$ en $\varphi_x(u) = 1/2$, conformément à la question 5.c et à l'intégrale qui suit cette définition.

Exercice 2, 8.d : Code adapté en Python. La demande de programme dans l'ancien langage est remplacée par Python, avec documentation de la racine carrée ; la suite et le critère d'arrêt sont conservés.

Exercice 3, préambule de 2 et 2.a : explicitation de l'indépendance des lancers successifs et des lancers des deux joueurs, nécessaire à l'identification de la loi conditionnelle binomiale.