



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2004

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Premier exercice

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par :

$$f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

1. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$, comprenant les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2.a. Établir, pour tout $t \in [0, +\infty[: 2e^t - t - t^2 > 0$ et $1 + t \geq \sqrt{1+t^2}$.

2.b. En déduire : $\forall t \in [0, +\infty[, f(t) > t$.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3.a. Établir que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3.b. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^6$. On pourra utiliser `np.exp(t)` et `np.sqrt(t)`, qui calculent respectivement l'exponentielle de t et sa racine carrée, après l'import `import numpy as np`.

On considère l'application $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_{-x}^x f(t) dt.$$

4.a. Montrer que G est impaire.

4.b. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4.c. Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

4.d. Étudier le sens de variation de G et dresser le tableau de variation de G sur $\mathbb{R}$, comprenant les limites de G en $-\infty$ et en $+\infty$.

Deuxième exercice

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$ et 0 la matrice nulle de $M_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $M_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$E_1(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) : AM = M\}, \quad E_2(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) : A^2M = AM\}.$$

Partie I

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

2.a. Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$.

2.b. Montrer que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.

3.a. Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$.

3.b. Un exemple : soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de C .

2. En déduire une matrice diagonale D , dont les termes diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P , dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, telle que $C = PDP^{-1}$.

3. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$. Montrer : $M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D)$.

4. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.

6. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_2(C)$. Est-ce que $E_1(C) = E_2(C)$?

Troisième exercice

Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes. La proportion de boules blanches est b , celle de boules rouges est r et celle de boules vertes est v .

Ainsi : $0 < b < 1, 0 < r < 1, 0 < v < 1$ et $b + r + v = 1$.

On effectue des tirages successifs indépendants avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.

Pour tout entier naturel i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i, V_i) l'événement «la i -ème boule tirée est blanche (respectivement rouge, verte)».

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Par exemple, lorsque le résultat des tirages est V_1, V_2, B_3 , la variable aléatoire X prend la valeur 3.

Partie I

1. Préciser les valeurs possibles de X .

2. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, P(X = k) = (1 - b)b^{k-1} + (1 - r)r^{k-1} + (1 - v)v^{k-1}.$$

3. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2.$$

Partie II

On considère la fonction f de classe C^2 sur l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[, f(x, y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}.$$

1. Calculer, pour tout $(x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

2. Montrer qu'il existe un unique point I de $]0, 1[\times]0, 1[$ en lequel f est susceptible de posséder un extremum local et déterminer I .

3. Calculer la matrice hessienne de f en I , déterminer les signes de ses valeurs propres et montrer que f admet en I un minimum local.

4.a. Exprimer $E(X)$ en fonction de $f(b, r)$.

4.b. Que peut-on dire de $E(X)$ lorsque $b = r = v = \frac{1}{3}$?

Partie III

1. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$ est convergente et déterminer sa valeur. On rappelle que $3^t = e^{t \ln 3}$.

On note $\alpha = \int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$ et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = 0 \text{ si } t \in]-\infty, 2[, \quad g(t) = \frac{1}{\alpha 3^t} \text{ si } t \in [2, +\infty[.$$

2. Vérifier que g est une densité de probabilité. On note Y une variable aléatoire admettant g comme densité.
3. Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

On note Z la variable aléatoire égale à la partie entière de Y . On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x .

4.a. Déterminer la loi de probabilité de Z .

4.b. Comparer la loi de probabilité de X lorsque $b = r = v = \frac{1}{3}$ et la loi de probabilité de Z .