



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**EM Lyon**

**Mathématiques 1 — Option économique**

**2004**

*Mathématiques appliquées*

---

**Mathématiques appliquées — Prépa ECG**

*Annales de concours · Corrigé*

## Premier exercice

1. Le dénominateur est strictement positif sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est donc de classe  $C^1$  et sa dérivée est :

$$f'(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{2te^t}{(1+t^2)^{3/2}} = \frac{2e^t(t^2 - t + 1)}{(1+t^2)^{3/2}}.$$

Comme  $t^2 - t + 1 = (t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ , on a  $f'(t) > 0$  pour tout réel  $t$ . Ainsi  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$ ,  $0 < f(t) \leq 2e^t$  puisque  $\sqrt{1+t^2} \geq 1$ . Par encadrement,  $f(t) \rightarrow 0$ .

Lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $\sqrt{1+t^2}/t = \sqrt{1+1/t^2} \rightarrow 1$ , et la croissance comparée de l'exponentielle et de  $t$  donne  $e^t/t \rightarrow +\infty$ . Donc  $f(t) \rightarrow +\infty$ .

| $t$     | $-\infty$ | $+\infty$          |
|---------|-----------|--------------------|
| $f'(t)$ | +         | +                  |
| $f(t)$  | 0         | $\nearrow +\infty$ |

2.a. Posons  $h(t) = 2e^t - t - t^2$  sur  $[0, +\infty[$ . On a  $h'(t) = 2e^t - 1 - 2t$  et  $h''(t) = 2e^t - 2 \geq 0$ . Ainsi  $h'$  est croissante et  $h'(t) \geq h'(0) = 1$ . La fonction  $h$  est donc croissante et  $h(t) \geq h(0) = 2 > 0$ .

Pour la deuxième inégalité,  $1+t$  et  $\sqrt{1+t^2}$  sont positifs et  $(1+t)^2 - (1+t^2) = 2t \geq 0$ . La comparaison de leurs carrés donne  $1+t \geq \sqrt{1+t^2}$ .

2.b. Pour  $t \geq 0$ , la question précédente donne :

$$2e^t > t + t^2 = t(1+t) \geq t\sqrt{1+t^2}.$$

La division par  $\sqrt{1+t^2} > 0$  fournit  $f(t) > t$ , y compris pour  $t = 0$ .

3.a. Comme  $u_0 = 1 > 0$  et que  $f$  prend des valeurs strictement positives, la suite est définie et positive à tout rang. D'après 2.b,  $u_{n+1} = f(u_n) > u_n$  : elle est strictement croissante.

Supposons qu'elle soit majorée. Le théorème de convergence des suites monotones lui donnerait une limite finie  $\ell \geq 1$ . La continuité de  $f$  permettrait de passer à la limite dans la relation de récurrence :  $\ell = f(\ell)$ . Or 2.b impose  $f(\ell) > \ell$ , contradiction. La suite croissante est donc non majorée, ce qui signifie  $u_n \rightarrow +\infty$ .

3.b. Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

### Python

```
import numpy as np

u = 1.0
n = 0

while u < 10**6:
    u = 2 * np.exp(u) / np.sqrt(1 + u**2)
    n = n + 1

print(n)
```

Avant chaque test,  $u$  contient  $u_n$ . L'initialisation représente  $u_0$  et chaque passage calcule le terme suivant puis augmente son indice. La boucle se termine puisque  $u_n \rightarrow +\infty$ . Comme les indices sont examinés dans l'ordre croissant, l'indice affiché est le premier pour lequel  $u_n \geq 10^6$ . Ce programme exécuté affiche 3.

4.a. Par définition et inversion des bornes d'intégration, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$G(-x) = \int_x^{-x} f(t) dt = - \int_{-x}^x f(t) dt = -G(x).$$

La fonction  $G$  est donc impaire, bien que  $f$  ne soit pas paire.

4.b. La continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  assure que  $H(x) = \int_0^x f(t) dt$  est de classe  $C^1$  avec  $H' = f$ . Par Chasles,  $G(x) = H(x) - H(-x)$ . On dérive la composition :

$$G'(x) = f(x) + f(-x) = \frac{2(e^x + e^{-x})}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Cette dérivée est continue sur  $\mathbb{R}$ , ce qui établit aussi que  $G$  est de classe  $C^1$ .

4.c. Pour  $x \geq 0$ , la positivité de  $f$  et 2.b donnent :

$$G(x) = \int_{-x}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \geq \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}.$$

Le membre de droite tend vers  $+\infty$ . Ainsi  $G(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

4.d. L'expression de 4.b montre que  $G'(x) > 0$  pour tout réel  $x$ . Ainsi  $G$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Son imparité et la limite en  $+\infty$  donnent  $G(x) \rightarrow -\infty$  lorsque  $x \rightarrow -\infty$ . Enfin  $G(0) = 0$ .

| $x$     | $-\infty$ | $0$          | $+\infty$          |
|---------|-----------|--------------|--------------------|
| $G'(x)$ | $+$       | $+$          | $+$                |
| $G(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow 0$ | $\nearrow +\infty$ |

Deuxième exercice

## Partie I

1. La matrice nulle vérifie  $A0 = 0$ , donc appartient à  $E_1(A)$ . Si  $M, N \in E_1(A)$  et  $s, t \in \mathbb{R}$ , la distributivité donne :

$$A(sM + tN) = sAM + tAN = sM + tN.$$

Ainsi  $E_1(A)$  est non vide et stable par combinaisons linéaires : c'est un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$ .

Résultat admis dans cette version adaptée : pour toute matrice  $A \in M_3(\mathbb{R})$ , l'ensemble  $E_2(A)$  est aussi un sous-espace vectoriel. Cette admission est déjà présente dans le sujet original ; elle permet de parler de sa base et de sa dimension dans la partie II.

2.a. Si  $M \in E_1(A)$ , alors  $AM = M$ . En multipliant à gauche par  $A$ , on obtient  $A^2M = AM$ . Donc  $M \in E_2(A)$  et  $E_1(A) \subset E_2(A)$ .

2.b. Supposons  $A$  inversible. Pour  $M \in E_2(A)$ , on a  $A^2M = AM$ . La multiplication à gauche par  $A^{-1}$  donne  $AM = M$ . Par conséquent  $M \in E_1(A)$  et l'inclusion réciproque est établie. Avec 2.a, cela prouve  $E_1(A) = E_2(A)$ .

3.a. L'équation  $AM = M$  s'écrit  $(A - I)M = 0$ . Lorsque  $A - I$  est inversible, la multiplication à gauche par son inverse donne  $M = 0$ . Réciproquement la matrice nulle appartient à  $E_1(A)$ . Donc  $E_1(A) = \{0\}$ .

3.b. Les matrices  $B$  et  $B - I$  sont triangulaires supérieures, de diagonales respectives  $(-1, -1, 2)$  et  $(-2, -2, 1)$ . Tous ces coefficients sont non nuls : les systèmes correspondants se résolvent par remontée avec un unique résultat pour tout second membre, donc ces matrices sont inversibles.

En appliquant 3.a avec  $A = B$ , on obtient  $E_1(B) = \{0\}$ . Puis, puisque  $B$  est inversible, 2.b donne  $E_2(B) = E_1(B) = \{0\}$ .

## Partie II

1. On cherche des vecteurs propres simples sans calcul de déterminant. Les sommes des coefficients de chaque ligne de  $C$  sont nulles, ce qui donne un premier vecteur. Des produits directs donnent ensuite :

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Notons ces trois vecteurs  $w_0, w_1, w_2$ , associés respectivement à 0, 1, 2. Ils sont non nuls et associés à des valeurs propres distinctes ; ils forment donc une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ , puis une base puisqu'ils sont trois.

Pour vérifier que cette liste est complète, écrivons un vecteur propre non nul  $w = a_0 w_0 + a_1 w_1 + a_2 w_2$  associé à une valeur propre  $\lambda$ . L'égalité  $Cw = \lambda w$  et l'unicité des coordonnées dans cette base donnent  $\lambda a_0 = 0$ ,  $(1 - \lambda)a_1 = 0$  et  $(2 - \lambda)a_2 = 0$ . Un coefficient au moins est non nul ; donc  $\lambda \in \{0, 1, 2\}$ . Les mêmes égalités montrent, pour chacune de ces trois valeurs, que les deux autres coordonnées sont nulles. Ainsi :

$$\text{Sp}(C) = \{0, 1, 2\},$$

$$\text{Ker } C = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \text{Ker}(C - I) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \text{Ker}(C - 2I) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

2. La base propre précédente est ordonnée suivant les valeurs propres croissantes. On pose :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de  $P$  forment une base, donc  $P$  est inversible. Sa première ligne est formée de 1. Les trois produits de la question 1 s'écrivent  $CP = PD$ , d'où  $C = PDP^{-1}$ .

Pour les calculs suivants, on peut expliciter l'inverse sans utiliser de déterminant. Si  ${}^t(P(a, b, c)) = {}^t(x, y, z)$ , alors  $x = a + b + c$ ,  $y = a + b$  et  $z = a + c$ . On en déduit  $a = -x + y + z$ ,  $b = x - z$ ,  $c = x - y$ , donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. L'égalité  $N = P^{-1}M$  équivaut à  $M = PN$ . En utilisant  $C = PDP^{-1}$ , on obtient la chaîne d'équivalences :

$$CM = M \iff PDP^{-1}PN = PN \iff PDN = PN \iff DN = N.$$

La dernière équivalence résulte de l'inversibilité de  $P$ . Elle signifie exactement  $M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D)$ .

4. La multiplication à gauche par  $D = \text{diag}(0, 1, 2)$  multiplie les trois lignes de  $N$  respectivement par 0, 1, 2. L'égalité  $DN = N$  impose donc que la première ligne soit nulle et que deux fois la troisième ligne soit égale à elle-même, donc que cette ligne soit nulle. La deuxième ligne est quelconque. On a bien :

$$N \in E_1(D) \iff \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. D'après 3 et 4, on multiplie la matrice précédente par  $P$  :

$$M = PN = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Toutes les matrices de cette forme appartiennent réciproquement à  $E_1(C)$ , par les mêmes équivalences. Posons :

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'expression de  $M$  donne  $M = aF_1 + bF_2 + cF_3$ , donc ces matrices engendrent  $E_1(C)$ . Si cette combinaison est nulle, sa première ligne donne successivement  $a = b = c = 0$ . La famille est donc libre. Ainsi  $(F_1, F_2, F_3)$  est une base et  $\dim E_1(C) = 3$ .

## 6. Méthode 1 — Utiliser la matrice diagonale.

En écrivant encore  $M = PN$ , on a :

$$C^2M = CM \iff PD^2N = PDN \iff D^2N = DN.$$

Or  $D^2 - D = \text{diag}(0, 0, 2)$ . L'équation impose seulement que la troisième ligne de  $N$  soit nulle. Il existe donc six réels tels que :

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = PN = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+h \\ a+d & b+e & c+h \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Les deux lignes distinctes de cette expression sont arbitraires. Par conséquent :

$$E_2(C) = \left\{ \begin{pmatrix} p & q & s \\ p & q & s \\ u & v & w \end{pmatrix} : (p, q, s, u, v, w) \in \mathbb{R}^6 \right\}.$$

Aux matrices  $F_1, F_2, F_3$  de 5, ajoutons :

$$F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice générale est  $pF_1 + qF_2 + sF_3 + uF_4 + vF_5 + wF_6$ . Cette représentation est unique : la première ligne détermine  $p, q, s$  et la troisième détermine  $u, v, w$ . Ces six matrices forment donc une base, et  $\dim E_2(C) = 6$ . En particulier  $E_1(C) \neq E_2(C)$  ; par exemple  $F_4$  appartient au second espace mais pas au premier.

## Méthode 2 — Résoudre directement une équation sur les colonnes.

Le produit matriciel donne  $C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ , donc :

$$C^2 - C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour une colonne  $W = {}^t(x, y, z)$ , l'équation  $(C^2 - C)W = 0$  équivaut à  $x = y$ , sans restriction sur  $z$ . Appliquée aux trois colonnes de  $M$ , elle impose exactement que la première et la deuxième ligne soient égales. On retrouve la description de  $E_2(C)$ , puis la même base de six matrices et la même dimension. Cette approche directe est utile lorsqu'un produit simple évite un changement de base ; la première réutilise la diagonalisation préparée par les questions précédentes.

Troisième exercice

## Partie I

Le modèle comporte des tirages indépendants avec remise. Cette indépendance est explicitée dans l'énoncé adapté et permet les produits de probabilités ci-dessous.

1. Un changement de couleur ne peut avoir lieu avant le deuxième tirage. Tout entier  $k \geq 2$  est possible, par exemple lorsque les  $k - 1$  premières boules sont blanches et que la suivante est rouge ; cet événement a pour probabilité  $b^{k-1}r > 0$ .

L'arrêt est presque sûr. En effet, pour  $n \geq 1$ , ne pas avoir changé de couleur après  $n$  tirages signifie que les  $n$  premières boules ont toutes la même couleur, donc :

$$P(X > n) = b^n + r^n + v^n \longrightarrow 0.$$

Il n'y a donc pas de probabilité positive d'une durée infinie. Les valeurs possibles de  $X$  sont les entiers de  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

2. Fixons  $k \geq 2$ . L'événement  $[X = k]$  est la réunion disjointe des trois événements : les  $k - 1$  premières boules sont blanches et la suivante n'est pas blanche ; les  $k - 1$  premières sont rouges et la suivante n'est pas rouge ; les  $k - 1$  premières sont vertes et la suivante n'est pas verte.

L'indépendance des tirages donne respectivement  $b^{k-1}(1 - b)$ ,  $r^{k-1}(1 - r)$  et  $v^{k-1}(1 - v)$ . Par addition de probabilités d'événements incompatibles :

$$P(X = k) = (1 - b)b^{k-1} + (1 - r)r^{k-1} + (1 - v)v^{k-1}.$$

3. Tous les termes de

$$\sum_{k=2}^{+\infty} kP(X = k)$$

sont positifs. Pour chaque  $p \in \{b, r, v\} \subset ]0, 1[$ , la série géométrique dérivée donne :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} kp^{k-1} = \frac{1}{(1 - p)^2} - 1.$$

Ainsi les trois séries qui composent le calcul de l'espérance convergent. Cela prouve d'abord la convergence absolue requise et donc l'existence de  $E(X)$ . En multipliant chaque somme par  $1 - p$ , puis en additionnant :

$$\begin{aligned} E(X) &= \left( \frac{1}{1 - b} - (1 - b) \right) + \left( \frac{1}{1 - r} - (1 - r) \right) + \left( \frac{1}{1 - v} - (1 - v) \right) = \frac{1}{1 - b} + \frac{1}{1 - r} \\ &+ \frac{1}{1 - v} - 2. \end{aligned}$$

On a utilisé  $(1 - b) + (1 - r) + (1 - v) = 3 - (b + r + v) = 2$ .

## Partie II

---

1. Sur l'ouvert  $O = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , les quantités  $1 - x$ ,  $1 - y$  et  $x + y$  sont strictement positives. La fonction est de classe  $C^2$  sur cet ouvert et ses dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2}.$$

2. Une fonction de classe  $C^1$  sur un ouvert ne peut avoir un extremum local qu'en un point où son gradient est nul. Ici cette condition équivaut à :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(x+y)^2} = \frac{1}{(1-y)^2}.$$

Tous les dénominateurs de base sont strictement positifs. L'égalité des carrés implique donc  $1 - x = x + y = 1 - y$ . Les première et dernière expressions donnent  $x = y$ , puis  $1 - x = 2x$  donne  $x = y = 1/3$ . Réciproquement ce couple appartient à  $O$  et annule les deux dérivées. L'unique point susceptible de porter un extremum local est ainsi  $I = (1/3, 1/3)$ .

3. Question adaptée au programme actuel : l'étude utilise la hessienne et les signes de ses valeurs propres.

### Méthode 1 — Étudier la hessienne au point critique.

---

Les dérivées secondes sur  $O$  sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{(1-y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2}{(x+y)^3}.$$

Au point  $I$ , les trois dénominateurs de base valent  $2/3$ . Donc :

$$\nabla^2 f(I) = \frac{27}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le produit avec  ${}^t(1, 1)$  donne  $\frac{81}{4}{}^t(1, 1)$  et celui avec  ${}^t(1, -1)$  donne  $\frac{27}{4}{}^t(1, -1)$ . Ces vecteurs sont indépendants, donc les deux valeurs propres sont  $81/4$  et  $27/4$ , toutes deux strictement positives. Comme  $f$  est de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $O$  et que  $I$  est critique, le critère hessien donne un minimum local strict en  $I$ . Sa valeur est  $f(I) = 9/2$ .

## Méthode 2 — Une inégalité directe donnant un minimum global.

Pour tout  $t > 0$ , l'identité suivante implique une minoration :

$$\frac{1}{t} - 3 + \frac{9}{4}t = \frac{(3t - 2)^2}{4t} \geq 0.$$

Appliquons-la à  $t = 1 - x$ ,  $t = 1 - y$  et  $t = x + y$ , qui sont positifs et de somme 2. En additionnant, on obtient  $f(x, y) \geq 9 - \frac{9}{4} \times 2 = 9/2$ . L'égalité exige  $1 - x = 1 - y = x + y = 2/3$ , donc  $(x, y) = I$ . Ainsi  $I$  est même l'unique minimum global de  $f$  sur  $O$ . Cette seconde méthode apporte une information globale que la hessienne au seul point critique ne fournit pas.

4.a. Les hypothèses sur  $b, r, v$  donnent  $(b, r) \in O$  et  $1 - v = b + r$ . Par conséquent :

$$E(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{b+r} - 2 = f(b, r) - 2.$$

4.b. Pour  $b = r = v = 1/3$ , le point  $(b, r)$  est  $I$ , d'où  $E(X) = f(I) - 2 = 9/2 - 2 = 5/2$ .

La méthode hessienne montre que cette configuration donne un minimum local strict de l'espérance parmi les proportions admissibles. La minoration directe de 3 permet de conclure davantage : c'est son minimum global, atteint uniquement lorsque les trois proportions sont égales. En effet, les proportions admissibles correspondent aux points de  $O$  vérifiant en plus  $b + r < 1$ , et  $I$  appartient à ce domaine.

## Partie III

1. Posons  $L = \ln 3 > 0$ . Pour  $A \geq 2$ , l'intégration sur le segment donne :

$$\int_2^A 3^{-t} dt = \int_2^A e^{-Lt} dt = \frac{e^{-2L} - e^{-AL}}{L}.$$

Comme  $e^{-AL} \rightarrow 0$  lorsque  $A \rightarrow +\infty$ , l'intégrale est convergente et :

$$\alpha = \int_2^{+\infty} 3^{-t} dt = \frac{1}{9 \ln 3}.$$

2. On a  $\alpha > 0$ , donc  $g(t) \geq 0$  pour tout réel  $t$ . La fonction est continue sur  $] -\infty, 2[$  et sur  $]2, +\infty[$ ; en 2, ses limites à gauche et à droite sont finies, respectivement 0 et  $1/(9\alpha) = \ln 3$ .

Son intégrale sur  $\mathbb{R}$  est convergente et égale à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_2^{+\infty} 3^{-t} dt = 1.$$

Ainsi  $g$  est bien une densité de probabilité dans le cadre demandé.

3. Méthode 1 — Intégration par parties sur un segment.

La variable  $Y$  est positive presque sûrement ; la condition d'existence de son espérance est donc la convergence de l'intégrale positive  $\int_2^{+\infty} tg(t) dt$ . Pour  $A \geq 2$ , une intégration par parties donne :

$$\int_2^A te^{-Lt} dt = \left[ -\frac{te^{-Lt}}{L} \right]_2^A + \frac{1}{L} \int_2^A e^{-Lt} dt.$$

Les croissances comparées donnent  $Ae^{-LA} \rightarrow 0$  ; la dernière intégrale converge d'après

1. Le passage à la limite est donc justifié et donne :

$$\int_2^{+\infty} te^{-Lt} dt = \frac{2}{9L} + \frac{1}{9L^2}.$$

Cette valeur finie établit l'existence de l'espérance. Comme  $1/\alpha = 9L$ , on obtient :

$$E(Y) = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{2}{9L} + \frac{1}{9L^2} \right) = 2 + \frac{1}{\ln 3}.$$

## Méthode 2 — Reconnaître une loi exponentielle translatée.

Pour  $t \geq 2$ ,  $g(t) = 9Le^{-Lt} = Le^{-L(t-2)}$ . Calculons la fonction de répartition de  $T = Y - 2$ . Pour  $s < 0$ , elle est nulle. Pour  $s \geq 0$ , on intègre jusqu'à  $s + 2$  :

$$P(T \leq s) = \int_2^{s+2} Le^{-L(t-2)} dt = 1 - e^{-Ls}.$$

C'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre  $L > 0$ . Ainsi  $T$  admet l'espérance  $1/L$ . Puisque  $Y = 2 + T$ , la linéarité établit l'existence de son espérance et donne à nouveau  $E(Y) = 2 + 1/\ln 3$ . Cette méthode identifie la structure probabiliste de la densité ; la première établit le résultat par calcul intégral direct.

4.a. La variable  $Y$  est supérieure ou égale à 2 presque sûrement. Sa partie entière  $Z$  prend donc des valeurs entières  $k \geq 2$ . Pour un tel entier,  $[Z = k] = [k \leq Y < k + 1]$ . Comme  $Y$  admet une densité, les bornes ont une probabilité nulle et :

$$P(Z = k) = \int_k^{k+1} 9Le^{-Lt} dt = 9(e^{-Lk} - e^{-L(k+1)}) = \frac{2}{3^{k-1}}.$$

Pour tout autre entier  $k$ , cette probabilité est nulle. La somme des probabilités trouvées vaut bien :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2}{3^{k-1}} = 2 \frac{1/3}{1 - 1/3} = 1.$$

La loi de  $Z - 1$  est donc la loi géométrique sur  $\mathbb{N}^*$  de paramètre  $2/3$ .

4.b. Dans le cas  $b = r = v = 1/3$ , la formule de I.2 donne, pour chaque entier  $k \geq 2$  :

$$P(X = k) = 3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{3^{k-1}} = P(Z = k).$$

Les deux variables sont à valeurs dans les entiers supérieurs ou égaux à 2 et ont la même probabilité en chacun de ces entiers. Elles ont donc la même loi. Cette égalité de lois n'affirme ni que les variables sont égales, ni qu'elles sont indépendantes.

## Relevé des adaptations

---

Premier exercice, 3.b : Code adapté en Python ; la consigne de programmation conserve le calcul du premier indice pour lequel  $u_n \geq 10^6$ . Les deux fonctions numériques utiles sont documentées dans le sujet.

Troisième exercice, préambule de la partie I : l'indépendance des tirages avec remise est explicitée afin de préciser le modèle utilisé pour les produits de probabilités.

Troisième exercice, préambule de la partie II et question II.3 : la nature ouverte du domaine est indiquée et la recherche du minimum est guidée par la hessienne et les signes de ses valeurs propres, conformément au programme actuel.