



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques — Option économique

2003

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre 3 et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Première partie

1. Calculer A^2 et A^3 , puis vérifier : $A^3 = A^2 + 2A$.
2. Montrer que la famille (A, A^2) est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un couple unique (a_n, b_n) de nombres réels tel que $A^n = a_n A + b_n A^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
4. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche a_n et b_n pour un entier n donné supérieur ou égal à 1.
- 5.a. Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n.$$
- 5.b. En déduire a_n et b_n en fonction de n , pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
- 5.c. Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n , pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Seconde partie

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, est A .

1. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et donner la dimension de $\text{Im}(f)$.
- 2.a. Est-ce que f est diagonalisable ?
- 2.b. Est-ce que f est bijectif ?
3. Déterminer les valeurs propres de f et donner, pour chaque sous-espace propre de f , une base de ce sous-espace propre.
4. Déterminer une matrice diagonale D , dont les termes diagonaux sont dans l'ordre réel croissant, et une matrice inversible P dont la troisième ligne est formée de termes tous égaux à 1, telle que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1} .
5. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM + MA = 0$.

Exercice 2

On note $e = \exp(1)$ et $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. Le domaine $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Pour tout nombre réel a non nul, on note $f_a : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f_a(x, y) = \frac{xe^{-x}}{y} - \frac{y}{a}.$$

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes entre elles.

Première partie

Dans cette partie, on prend $a = -e$ et on note g à la place de f_{-e} . Ainsi,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad g(x, y) = \frac{xe^{-x}}{y} + \frac{y}{e}.$$

1. Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g en tout point (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer qu'il existe un couple unique (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ en lequel les deux dérivées partielles d'ordre 1 de g s'annulent, et calculer ce couple.
4. Est-ce que g admet un extremum ? On calculera sa hessienne au point critique et on étudiera les signes de ses valeurs propres.

Seconde partie

Dans cette seconde partie, on prend $a = 1$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'application $h_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad h_n(x) = f_1(x, x^n) = \frac{xe^{-x}}{x^n} - x^n,$$

et l'application $\varphi_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}.$$

1.a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in]0, +\infty[$,

$$h_n(x) = 0 \iff \varphi_n(x) = 0.$$

1.b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $h_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée u_n , et que $0 < u_n < 1$.

2.a. Montrer, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\ln u_n = -\frac{u_n}{2n-1}.$$

2.b. En déduire que $u_n \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3

1. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ est convergente et calculer sa valeur.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ \frac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

2. Montrer que f définit une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité.
 - 3.a. Déterminer sa fonction de répartition.
 - 3.b. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

On considère trois variables aléatoires indépendantes T_1, T_2, T_3 , chacune de même loi que X .

4. On considère la variable aléatoire $U = \inf(T_1, T_2, T_3)$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad [U > t] = [T_1 > t] \cap [T_2 > t] \cap [T_3 > t].$$

- 4.a. Déterminer la fonction de répartition G de U .
- 4.b. Montrer que U admet une densité et déterminer une densité g de U .
- 4.c. Montrer que U admet une espérance et calculer $E(U)$.

5. On considère la variable aléatoire $V = \sup(T_1, T_2, T_3)$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad [V \leq t] = [T_1 \leq t] \cap [T_2 \leq t] \cap [T_3 \leq t].$$

- 5.a. Déterminer la fonction de répartition H de V .
- 5.b. Montrer que V admet une densité et déterminer une densité h de V .
- 5.c. La variable aléatoire V admet-elle une espérance ?