



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques — Option économique

2003

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Première partie

1. On multiplie les lignes de la première matrice par les colonnes de la seconde. Par exemple, le coefficient $(1, 1)$ de A^2 est $1 + 1 + 1 = 3$, et son coefficient $(2, 2)$ est 1. Le produit donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En multipliant encore par A , on obtient :

$$A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or

$$A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3+2 & 1+2 & 1+2 \\ 1+2 & 1 & 1 \\ 1+2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^3.$$

L'identité demandée est donc vérifiée par un calcul direct.

2. Pour établir la liberté, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha A + \beta A^2 = 0$.

Le coefficient $(2, 2)$ de cette égalité donne $\beta = 0$. Le coefficient $(1, 2)$ donne alors $\alpha = 0$. Ainsi, la seule combinaison linéaire nulle des deux matrices est la combinaison de coefficients nuls : (A, A^2) est libre.

3. On démontre l'existence par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, on a $A = 1 \cdot A + 0 \cdot A^2$, donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ conviennent.

Supposons $A^n = a_n A + b_n A^2$. En multipliant par A et en utilisant la question 1,

$$A^{n+1} = a_n A^2 + b_n A^3 = a_n A^2 + b_n (A^2 + 2A) = 2b_n A + (a_n + b_n) A^2.$$

L'existence est établie à l'indice suivant, donc à tout indice $n \geq 1$.

Pour l'unicité, si $a_n A + b_n A^2 = a'_n A + b'_n A^2$, alors

$$(a_n - a'_n)A + (b_n - b'_n)A^2 = 0.$$

La liberté démontrée en 2 impose $a_n = a'_n$ et $b_n = b'_n$. L'expression calculée à l'indice suivant est donc nécessairement celle de l'unique couple :

$$\forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n.$$

4. Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel : le langage de programmation est remplacé par Python, sans modifier la récurrence ni les valeurs demandées.

Le programme suivant s'utilise avec un entier $n \geq 1$:

Python

```
def afficher_coefficients(n):
    a = 1
    b = 0
    for k in range(1, n):
        ancien_a = a
        a = 2 * b
        b = ancien_a + b
    print(a, b)
```

Avant la première itération, les variables a et b contiennent a_1 et b_1 . À l'itération d'indice k , elles contiennent d'abord a_k, b_k , puis deviennent a_{k+1}, b_{k+1} selon 3. La variable `ancien_a` conserve la valeur de a_k nécessaire au calcul de b_{k+1} . La borne finale de

$\text{range}(1, n)$ est exclue : les $n - 1$ itérations conduisent exactement à a_n, b_n . Pour $n = 1$, aucune itération n'est effectuée et les valeurs initiales sont affichées.

Le code a été exécuté pour les entiers de 1 à 8 et comparé aux formules de 5.b. Par exemple, l'appel `afficher_coefficients(5)` affiche 6 5. Ces contrôles numériques confirment la cohérence du programme ; sa justification est l'invariant de boucle précédent.

5.a. On utilise les deux relations de 3, à leurs indices respectifs :

$$a_{n+2} = 2b_{n+1} = 2(a_n + b_n) = 2a_n + a_{n+1}.$$

La relation $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ est donc valable pour tout $n \geq 1$.

5.b. La suite (a_n) vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2, à racines caractéristiques réelles. L'équation associée est

$$r^2 - r - 2 = (r - 2)(r + 1) = 0.$$

Ses racines 2 et -1 sont distinctes. Il existe donc deux réels α, β tels que

$$a_n = \alpha 2^{n-1} + \beta(-1)^{n-1}.$$

Les valeurs initiales sont $a_1 = 1$ et $a_2 = 2b_1 = 0$. Ainsi,

$$\alpha + \beta = 1, \quad 2\alpha - \beta = 0,$$

d'où $\alpha = 1/3$ et $\beta = 2/3$. Par conséquent,

$$a_n = \frac{2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3}.$$

Pour calculer b_n , la relation $a_{n+1} = 2b_n$ donne

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{2} = \frac{2^n + 2(-1)^n}{6} = \frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3}.$$

Ces formules valent pour tout $n \geq 1$ et redonnent bien $a_1 = 1, b_1 = 0$.

5.c. En remplaçant a_n, b_n dans l'égalité de 3, on obtient, pour tout entier $n \geq 1$,

$$A^n = \frac{2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3}A + \frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3}A^2.$$

Seconde partie

1. L'image de f est engendrée par les colonnes de A , c'est-à-dire par

$$f(e_1) = (1, 1, 1), \quad f(e_2) = (1, 0, 0), \quad f(e_3) = (1, 0, 0).$$

La troisième colonne est égale à la deuxième. Les deux premières sont indépendantes : si $\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 0, 0) = 0$, la deuxième coordonnée impose $\alpha = 0$, puis la première impose $\beta = 0$.

Ainsi, $((1, 1, 1), (1, 0, 0))$ est une base de $\text{Im}(f)$ et $\dim \text{Im}(f) = 2$.

2.a. La matrice A est réelle symétrique, puisque ${}^tA = A$. Le résultat du programme selon lequel toute matrice réelle symétrique est diagonalisable s'applique. Il en résulte que f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2.b. L'image de f a pour dimension 2, strictement inférieure à $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

L'endomorphisme n'est donc pas surjectif, et n'est pas bijectif.

3. On cherche les valeurs propres à partir de l'identité matricielle établie dans la première partie, sans déterminant.

Soient $v \neq 0$ un vecteur propre et $\lambda \in \mathbb{R}$ sa valeur propre. L'égalité $A^3 = A^2 + 2A$ appliquée à v donne

$$(\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda)v = 0.$$

Comme $v \neq 0$, on a $\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$. Les seules valeurs propres possibles sont donc $-1, 0, 2$. Vérifions leur existence et déterminons leurs sous-espaces propres.

Pour $v = (x, y, z)$, on a $f(v) = (x + y + z, x, x)$.

Si $f(v) = -v$, les deuxième et troisième coordonnées donnent $y = z = -x$; la première équation est alors satisfaite. Ainsi,

$$E_{-1}(f) = \text{Vect}((-1, 1, 1)).$$

Si $f(v) = 0$, les deux dernières coordonnées donnent $x = 0$, puis la première donne $y + z = 0$. Ainsi,

$$E_0(f) = \text{Vect}((0, -1, 1)).$$

Si $f(v) = 2v$, les deux dernières coordonnées donnent $x = 2y = 2z$; la première est alors satisfaite. Ainsi,

$$E_2(f) = \text{Vect}((2, 1, 1)).$$

Chaque espace obtenu contient un vecteur non nul, donc les trois valeurs candidates sont effectivement propres. Les trois familles réduites à un vecteur affichées ci-dessus sont des bases de leurs sous-espaces propres respectifs.

4. Les trois vecteurs propres précédents ont leur troisième coordonnée égale à 1. Les valeurs propres correspondantes sont dans l'ordre $-1 < 0 < 2$. On choisit donc

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de P sont des vecteurs propres non nuls associés à trois valeurs propres distinctes. Elles sont donc libres et forment une base de $\mathbb{R}^3$; P est inversible. L'identité $AP = PD$ donne alors $A = PDP^{-1}$.

Pour calculer l'inverse sans déterminant, résolvons ${}^t(P(\alpha, \beta, \gamma)) = {}^t(x, y, z)$. Le système est

$$-\alpha + 2\gamma = x, \quad \alpha - \beta + \gamma = y, \quad \alpha + \beta + \gamma = z.$$

La différence des deux dernières équations donne $\beta = (z - y)/2$. Leur somme donne $\alpha + \gamma = (y + z)/2$. En remplaçant $\alpha = (y + z)/2 - \gamma$ dans la première équation,

$$3\gamma = x + \frac{y + z}{2}.$$

Ainsi,

$$\gamma = \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6}, \quad \alpha = -\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3}, \quad \beta = -\frac{y}{2} + \frac{z}{2}.$$

On lit donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

5. On utilise la diagonalisation pour transformer l'équation matricielle en neuf équations scalaires.

Pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, posons $N = P^{-1}MP$. Les matrices P et P^{-1} étant inversibles,

$$AM + MA = 0 \iff DN + ND = 0.$$

Notons $(d_1, d_2, d_3) = (-1, 0, 2)$ et $N = (n_{ij})$. Le coefficient (i, j) de $DN + ND$ est $(d_i + d_j)n_{ij}$. Les sommes $d_i + d_j$ forment le tableau

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

La seule somme nulle est celle de position $(2, 2)$. Toutes les autres équations imposent $n_{ij} = 0$; le coefficient n_{22} est libre. On a donc

$$N = c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

En multipliant $M = PNP^{-1}$, la deuxième colonne de P et la deuxième ligne de P^{-1}

donnent

$$M = \frac{c}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, toute matrice de cette forme correspond à une matrice N vérifiant $DN + ND = 0$, donc vérifie $AM + MA = 0$. Comme $c/2$ parcourt $\mathbb{R}$, l'ensemble cherché est

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 2

Première partie

1. Le domaine $O =]0, +\infty[^2$ est ouvert, comme indiqué dans le sujet. Les fonctions $x \mapsto xe^{-x}$ et $y \mapsto 1/y$ sont de classe C^2 sur $]0, +\infty[$; la fonction $(x, y) \mapsto y/e$ l'est également. Les produits et sommes de ces fonctions sont de classe C^2 sur O , et leur dénominateur y n'y est jamais nul. Ainsi, g est de classe C^2 sur O .

2. En dérivant par rapport à x avec y fixé, puis par rapport à y avec x fixé, on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{(1-x)e^{-x}}{y}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{xe^{-x}}{y^2} + \frac{1}{e}.$$

Ces expressions sont valables pour tout $(x, y) \in O$.

3. Sur O , on a $e^{-x} > 0$ et $y > 0$. La première dérivée partielle est donc nulle si et seulement si $x = 1$.

Pour $x = 1$, la seconde dérivée partielle est nulle si et seulement si

$$-\frac{1}{ey^2} + \frac{1}{e} = 0 \iff y^2 = 1.$$

Puisque $y > 0$, cette égalité impose $y = 1$. Réciproquement, les deux dérivées partielles s'annulent en $(1, 1)$. Le point critique unique est donc $(1, 1)$.

4. Question adaptée au programme actuel : l'étude de la hessienne et du signe de ses valeurs propres est explicitement demandée. Elle fournit la première méthode.

Méthode 1 — Hessienne au point critique

Les dérivées secondes sont

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{(x-2)e^{-x}}{y}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{(1-x)e^{-x}}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2xe^{-x}}{y^3}.$$

La fonction étant C^2 sur l'ouvert O , les deux dérivées croisées sont égales et

$$\nabla^2 g(1, 1) = \begin{pmatrix} -1/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix}.$$

Cette matrice diagonale a pour valeurs propres $-1/e < 0$ et $2/e > 0$. Le critère du programme s'applique au point critique intérieur $(1, 1)$: il s'agit d'un point selle, donc il n'y a pas d'extremum local en ce point.

Tout extremum local sur O doit être un point critique puisque g est C^1 et O ouvert. Le seul point critique n'en étant pas un, g n'admet aucun extremum local sur O . Un extremum global serait également local ; g n'admet donc pas non plus d'extremum global.

Méthode 2 — Comparaison sur deux droites

Cette méthode donne une interprétation concrète du point selle à partir de fonctions d'une variable.

On a $g(1, 1) = 2/e$. Sur la droite $x = 1$, pour $y > 0$,

$$g(1, y) - \frac{2}{e} = \frac{1}{e} \left(\frac{1}{y} + y - 2 \right) = \frac{(y-1)^2}{ey}.$$

Cette différence est strictement positive pour $y \neq 1$. Il y a donc, aussi près que l'on veut de $(1, 1)$, des points où g est strictement supérieure à $g(1, 1)$.

Sur la droite $y = 1$, on a $g(x, 1) = xe^{-x} + 1/e$. La fonction $q(x) = xe^{-x}$ a pour dérivée $q'(x) = (1-x)e^{-x}$; elle est strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Elle atteint donc son maximum strict en 1. Pour tout $x > 0$ distinct de 1,

$$g(x, 1) < \frac{2}{e}.$$

Il existe aussi, aussi près que l'on veut de $(1, 1)$, des points où g est strictement inférieure à $g(1, 1)$. Ce point n'est ni un minimum ni un maximum local. Comme c'est le seul point critique, on retrouve l'absence de tout extremum sur O .

Seconde partie

1.a. Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on factorise par le facteur strictement positif x^{1-n} :

$$h_n(x) = x^{1-n}e^{-x} - x^n = x^{1-n}(e^{-x} - x^{2n-1}) = x^{1-n}\varphi_n(x).$$

Le facteur x^{1-n} étant non nul, $h_n(x) = 0$ équivaut à $\varphi_n(x) = 0$.

1.b. Fixons $n \geq 1$. La fonction φ_n est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, avec

$$\varphi'_n(x) = -e^{-x} - (2n-1)x^{2n-2} < 0.$$

Elle est donc strictement décroissante. Ses limites aux bornes sont

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_n(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = -\infty.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie donnent une unique solution $u_n > 0$ de $\varphi_n(x) = 0$. De plus, $\varphi_n(1) = e^{-1} - 1 < 0$, alors que la limite en 0^+ est positive : la solution se situe dans $]0, 1[$. Par 1.a, c'est aussi l'unique solution de $h_n(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$.

2.a. La relation $\varphi_n(u_n) = 0$ s'écrit

$$e^{-u_n} = u_n^{2n-1}.$$

Les deux membres sont strictement positifs et $u_n > 0$; on peut donc appliquer le logarithme et ses règles de calcul :

$$-u_n = (2n - 1) \ln u_n.$$

Comme $2n - 1 > 0$, on en déduit $\ln u_n = -u_n / (2n - 1)$.

2.b. D'après 1.b, $0 < u_n < 1$. L'égalité précédente donne

$$-\frac{1}{2n-1} < \ln u_n < 0.$$

Les deux bornes tendent vers 0, donc $\ln u_n \rightarrow 0$ par encadrement. Par continuité de l'exponentielle en 0,

$$u_n = \exp(\ln u_n) \rightarrow \exp(0) = 1.$$

Exercice 3

1. L'intégrande $x^{-3/2}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$. Pour toute borne finie $B > 2$,

$$\int_2^B \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} \right]_2^B = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{B}}.$$

Cette quantité tend vers $\sqrt{2}$ lorsque $B \rightarrow +\infty$. L'intégrale généralisée est donc convergente et

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \sqrt{2}.$$

2. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $] -\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, avec des limites finies de part et d'autre de 2 : 0 à gauche et $1/4$ à droite.

La question 1 donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = 1.$$

La positivité, la continuité par morceaux et cette normalisation établissent que f est une densité de probabilité dans le cadre du programme.

- 3.a. Notons F la fonction de répartition de X . Pour $x < 2$, f est nulle sur $] -\infty, x]$, donc $F(x) = 0$.

Pour $x \geq 2$,

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{\sqrt{2}} t^{-3/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} [-2t^{-1/2}]_2^x = 1 - \sqrt{\frac{2}{x}}.$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ 1 - \sqrt{2/x} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Les deux expressions se raccordent en 2, où $F(2) = 0$.

- 3.b. La variable X est positive presque sûrement. Son espérance existe si et seulement si

$\int_2^{+\infty} x f(x) dx$ est finie. Pour $B > 2$,

$$\int_2^B x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^B x^{-1/2} dx = \sqrt{2}(\sqrt{B} - \sqrt{2}).$$

Cette expression tend vers $+\infty$. L'intégrale n'est donc pas absolument convergente, et X n'admet pas d'espérance finie.

- 4.a. Les trois variables ont pour fonction de répartition F et sont indépendantes. Les événements $[T_i > t]$ sont donc indépendants. Par l'identité d'événements donnée dans le

sujet,

$$P(U > t) = \prod_{i=1}^3 P(T_i > t) = (1 - F(t))^3.$$

La fonction de répartition de U est donc $G(t) = 1 - (1 - F(t))^3$. Pour $t < 2$, cette valeur est 0. Pour $t \geq 2$, on a $1 - F(t) = \sqrt{2/t}$, d'où

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2, \\ 1 - \left(\frac{2}{t}\right)^{3/2} & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

4.b. La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$, y compris en 2, et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. La variable U est donc à densité. En dérivant de part et d'autre de 2,

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2, \\ 3\sqrt{2}t^{-5/2} & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

est une densité de U . En effet, pour $t > 2$,

$$G'(t) = \frac{3}{2} 2^{3/2} t^{-5/2} = 3\sqrt{2} t^{-5/2}.$$

La valeur choisie en 2 n'affecte pas la loi; les limites latérales de g y sont finies, ce qui respecte le cadre des densités du programme.

4.c. Comme $U \geq 2$ presque sûrement, il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale positive donnant son premier moment. Pour $B > 2$,

$$\int_2^B t g(t) dt = 3\sqrt{2} \int_2^B t^{-3/2} dt = 3\sqrt{2} \left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{B}} \right).$$

Sa limite est 6. L'intégrale est absolument convergente, donc U admet une espérance et $E(U) = 6$.

5.a. Les événements $[T_i \leq t]$ sont indépendants, puisque les variables T_i le sont. Ainsi,

$$H(t) = P(V \leq t) = \prod_{i=1}^3 P(T_i \leq t) = F(t)^3.$$

On en déduit

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2, \\ (1 - \sqrt{2/t})^3 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

5.b. La fonction H est continue sur $\mathbb{R}$, notamment en 2, où les deux expressions valent 0. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, donc V admet une densité.

Pour $t > 2$, la dérivation de $H = F^3$ donne $H'(t) = 3F(t)^2 F'(t) = 3F(t)^2 f(t)$. On peut donc choisir

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2, \\ \frac{3}{t\sqrt{2t}} (1 - \sqrt{2/t})^2 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

Cette fonction est positive ; ses limites latérales en 2 sont toutes deux nulles et elle appartient au cadre des densités du programme.

5.c. On étudie l'intégrale positive $\int_2^{+\infty} th(t) dt$ avant toute utilisation d'une espérance.

Pour $t \geq 8$, on a $\sqrt{2/t} \leq 1/2$, donc $1 - \sqrt{2/t} \geq 1/2$ et

$$h(t) = 3f(t) (1 - \sqrt{2/t})^2 \geq \frac{3}{4}f(t).$$

Pour $B > 8$, il en résulte

$$\int_8^B th(t) dt \geq \frac{3}{4} \int_8^B tf(t) dt = \frac{3\sqrt{2}}{4}(\sqrt{B} - \sqrt{8}).$$

Le minorant tend vers $+\infty$. L'intégrale donnant le premier moment diverge donc, et V n'admet pas d'espérance finie.

Relevé des adaptations

Exercice 1, première partie, 4 : Code adapté en Python. Seul le langage demandé est modifié ; le calcul des coefficients et leur affichage sont conservés.

Exercice 2, préambule et première partie, 4 : la nature ouverte du domaine est indiquée et l'étude des extrema par la hessienne et les signes de ses valeurs propres est explicitée. La question et sa conclusion sont conservées.

Exercice 2, préambule de la première partie : la notation $g(x, y)$ remplace la notation $f_a(x, y)$ restée par erreur dans la formule affichée après la spécialisation $a = -e$. La formule mathématique elle-même est inchangée. Dans la seconde partie, l'indice de f_1 est explicité conformément à $a = 1$.