



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2002

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On considère les deux matrices carrées réelles d'ordre quatre suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les questions 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

1.a. Calculer K^2 .

1.b. En déduire que la matrice K est inversible et déterminer K^{-1} .

1.c. Montrer que la matrice K n'admet aucune valeur propre réelle.

2. Soient a et b deux nombres réels. On note M la matrice définie par $M = aI + bK$.

2.a. Montrer : $M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM$.

2.b. En déduire que, si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors la matrice M est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de I et M .

2.c. Application : donner l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 + \sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à la matrice K relativement à la base $\mathcal{B}$. On considère les quatre éléments suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$

3.a. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

3.b. Exprimer $f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)$ en fonction de v_1, v_2, v_3, v_4 et en déduire la matrice K' associée à f relativement à la base $\mathcal{C}$.

3.c. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

3.d. Rappeler l'expression de K' en fonction de K, P et P^{-1} .

Exercice 2

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0, +\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots - \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

I. Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}, \text{ où } P'_n \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

2. Étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n .

3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

4.a. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right).$$

4.b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geq 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée x_n , et que :

$$1 < x_n \leq 2.$$

6. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt.$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt.$$

3. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1, +\infty[$:

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 3

1. Étude préliminaire

On admet, pour tout entier naturel k et pour tout réel $x \in [0, 1[$, que la série

$$\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$$

est convergente et on note :

$$s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

1.a. Vérifier, pour tout réel $x \in [0, 1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

1.b. Pour tout couple d'entiers naturels (n, k) tel que $k < n$, montrer :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

1.c. Pour tout entier naturel k et pour tout réel $x \in [0, 1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x).$$

1.d. Montrer, par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

2. Étude d'une expérience aléatoire

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante, les tirages successifs avec remise étant indépendants :

On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire, que l'on remet aussi dans l'urne. On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.

Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n , on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise. On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

2.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire N . Donner son espérance.

2.b. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k \mid N = n)$.

2.c. Vérifier : $P(X = 0) = \frac{4}{9}$.

2.d. En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = \frac{25}{36} \left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

2.e. Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

2.f. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X \leq k) = 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

3. Étude d'une variable aléatoire à densité

On note $a = -\frac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a, +\infty[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle : $\forall x \in \mathbb{R}, \left(\frac{4}{9}\right)^x = e^{x \ln(4/9)}$.

- 3.a. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notée Y .
- 3.b. Déterminer une densité f de Y .
- 3.c. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{x \ln(4/9)}$.
- 3.d. Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ et calculer $E(Y)$.