



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2002

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1.a. On effectue le produit matriciel en multipliant chaque ligne de K par chaque colonne. Par exemple, le coefficient $(1, 1)$ est $1 + 1 + 0 - 3 = -1$, le coefficient $(1, 2)$ est $1 + 1 + 1 - 3 = 0$, et le coefficient $(1, 4)$ est $-3 - 2 - 1 + 6 = 0$. Le calcul complet donne :

$$K^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

1.b. La relation $K(-K) = (-K)K = I$ établit l'inversibilité de K . Son inverse est donc :

$$K^{-1} = -K = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.c. Supposons qu'un réel λ soit valeur propre de K . Il existe alors une colonne réelle $U \neq 0$ telle que $KU = \lambda U$. En appliquant encore K , on obtient $K^2U = \lambda^2U$. Or $K^2 = -I$, donc $(\lambda^2 + 1)U = 0$. Comme $U \neq 0$, cela impose $\lambda^2 + 1 = 0$, impossible pour un réel. Ainsi K n'admet aucune valeur propre réelle.

2.a. La matrice identité commute avec K . En développant le produit puis en utilisant $K^2 = -I$:

$$M^2 = a^2I + 2abK + b^2K^2 = (a^2 - b^2)I + 2abK.$$

Par ailleurs,

$$-(a^2 + b^2)I + 2aM = -(a^2 + b^2)I + 2a(aI + bK) = (a^2 - b^2)I + 2abK.$$

Les deux expressions sont égales, ce qui établit la relation demandée.

2.b. Méthode 1 — Utiliser la relation polynomiale obtenue.

La relation précédente se réécrit $M(2aI - M) = (a^2 + b^2)I$. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, le réel $a^2 + b^2$ est strictement positif. On peut donc diviser par cette quantité et obtenir :

$$M \left(\frac{2a}{a^2 + b^2} I - \frac{1}{a^2 + b^2} M \right) = I.$$

Un inverse à droite d'une matrice carrée est son inverse. Ainsi :

$$M^{-1} = \frac{2a}{a^2 + b^2} I - \frac{1}{a^2 + b^2} M.$$

Méthode 2 — Construire directement un produit scalaire de l'identité.

La multiplication donne :

$$(aI + bK)(aI - bK) = a^2I - b^2K^2 = (a^2 + b^2)I.$$

Le produit dans l'autre ordre donne le même résultat. Par conséquent

$M^{-1} = (aI - bK)/(a^2 + b^2)$. Comme $bK = M - aI$, on retrouve $(2aI - M)/(a^2 + b^2)$. La première méthode exploite le résultat précédent ; la seconde permet de reconnaître directement une factorisation utile pour un inverse.

2.c. La matrice donnée est $M = \sqrt{2}I + K$, donc $a = \sqrt{2}$, $b = 1$ et $a^2 + b^2 = 3$. Elle est inversible et :

$$M^{-1} = \frac{\sqrt{2}I - K}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & \sqrt{2} - 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \sqrt{2} + 2 \end{pmatrix}.$$

3.a. Les colonnes de K donnent $v_2 = (1, 1, 0, 1)$ et $v_4 = (-1, 1, 0, 0)$. Ainsi :

$$v_1 = (1, 0, 0, 0), \quad v_2 = (1, 1, 0, 1), \quad v_3 = (0, 0, 1, 0), \quad v_4 = (-1, 1, 0, 0).$$

Pour montrer la liberté, considérons une relation $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 = 0$. Les quatre coordonnées donnent :

$$\alpha + \beta - \delta = 0, \quad \beta + \delta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \beta = 0.$$

La dernière équation impose $\beta = 0$, puis la deuxième $\delta = 0$, la première $\alpha = 0$, et la troisième $\gamma = 0$. La famille est libre et comporte quatre vecteurs dans l'espace de dimension quatre $\mathbb{R}^4$: c'est une base.

3.b. Par définition, $f(v_1) = v_2$ et $f(v_3) = v_4$. La relation $K^2 = -I$ traduit $f \circ f = -\text{Id}_{\mathbb{R}^4}$, donc :

$$f(v_2) = -v_1, \quad f(v_4) = -v_3.$$

Les colonnes de K' sont les coordonnées de ces quatre images dans $\mathcal{C}$. Par conséquent :

$$K' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.c. La matrice de passage a pour colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible parce que ses colonnes forment la base démontrée en 3.a.

3.d. Pour une colonne de coordonnées, la convention de passage est $U_{\mathcal{B}} = PU_{\mathcal{C}}$. En appliquant f , on a $KP = PK'$, puis, puisque P est inversible :

$$K' = P^{-1}KP.$$

Exercice 2

I. Étude des fonctions polynomiales P_n

1. La somme définissant P_n est finie ; on peut la dériver terme à terme. On obtient :

$$P'_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} = - \sum_{j=0}^{2n-1} (-x)^j.$$

Pour $x \geq 0$, le réel $1 + x$ est non nul. La somme géométrique finie donne alors :

$$P'_n(x) = - \frac{1 - (-x)^{2n}}{1 + x} = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}.$$

2. Le dénominateur est strictement positif. Pour $n \geq 1$, le numérateur est négatif lorsque $0 \leq x < 1$, nul en 1, positif lorsque $x > 1$. Le polynôme P_n est donc strictement

décroissant sur $[0, 1]$, puis strictement croissant sur $[1, +\infty[$. De plus $P_n(0) = 0$. Son terme de plus haut degré étant $x^{2n}/(2n)$, on a $P_n(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Le tableau de variations peut ainsi se lire :

x	0	1	$+\infty$
Signe de P'_n	—	0	+
P_n	0	$P_n(1)$	$+\infty$

La fonction décroît de 0 à $P_n(1)$, puis croît de $P_n(1)$ vers $+\infty$.

3. Méthode 1 — Exploiter les variations.

Puisque P_n est strictement décroissant sur $[0, 1]$, on a $P_n(1) < P_n(0) = 0$.

Méthode 2 — Regrouper les termes de la somme finie.

En réunissant chaque terme d'indice impair avec le terme d'indice pair qui le suit :

$$P_n(1) = \sum_{j=1}^n \left(-\frac{1}{2j-1} + \frac{1}{2j} \right) = -\sum_{j=1}^n \frac{1}{(2j-1)2j} < 0.$$

La première méthode réutilise l'étude de fonction ; la seconde établit directement le signe d'une somme alternée en la regroupant par paires, sans employer de critère général de séries alternées.

4.a. La définition de P_{n+1} ajoute exactement deux termes à celle de P_n :

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{2n+2}.$$

En factorisant x^{2n+1} , on obtient la relation demandée, valable aussi pour $x = 0$.

4.b. On utilise une récurrence sur n . Pour $n = 1$, $P_1(2) = -2 + 2 = 0$. Pour tout $n \geq 1$, la relation de 4.a donne :

$$P_{n+1}(2) - P_n(2) = 2^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{n+1} \right) = 2^{2n+1} \frac{n}{(2n+1)(n+1)} > 0.$$

Par conséquent, si $P_n(2) \geq 0$, alors $P_{n+1}(2) > 0$. La récurrence établit $P_n(2) \geq 0$ pour tout $n \geq 1$; il y a égalité pour $n = 1$ seulement.

5. Le polynôme P_n est continu sur $[1, 2]$, avec $P_n(1) < 0$ et $P_n(2) \geq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une racine dans $]1, 2]$. La stricte croissance sur $[1, +\infty[$, établie en 2, assure son unicité dans cet intervalle. On peut donc définir x_n et conclure $1 < x_n \leq 2$.

6. Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

On a $P_2(x) = -x + x^2/2 - x^3/3 + x^4/4$. La racine cherchée est unique dans $[1, 2]$. Une dichotomie conserve un intervalle $[a, b]$ contenant x_2 . Comme P_2 est strictement croissant, le signe au milieu m détermine la moitié à conserver. Voici le programme complet, sans bibliothèque :

Python

```
def P2(x):
    return -x + x**2 / 2 - x**3 / 3 + x**4 / 4

a = 1.0
b = 2.0
while b - a > 0.001:
    m = (a + b) / 2
    if P2(m) < 0:
        a = m
    else:
        b = m
print((a + b) / 2)
```

Si le milieu est exactement racine, la mise à jour $b = m$ conserve encore x_2 dans l'intervalle. Sa longueur est divisée par deux à chaque passage ; après dix passages, elle vaut $2^{-10} < 10^{-3}$, ce qui assure la terminaison. Le milieu affiché a une erreur au plus égale à la demi-longueur finale, donc strictement inférieure à 10^{-3} . Le programme exécuté affiche 1,62158203125 ; l'intervalle final est $[1,62109375, 1,6220703125]$. En particulier 1,622 est aussi une approximation de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Pour $t \geq 0$, la fonction $(t^{2n} - 1)/(t + 1)$ est continue et égale à $P'_n(t)$. Le théorème fondamental du calcul intégral, appliqué sur le segment $[0, x]$, donne :

$$\int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = P_n(x) - P_n(0) = P_n(x).$$

Cette égalité vaut également pour $x = 0$.

2. On applique l'égalité de 1 à x_n . Puisque $P_n(x_n) = 0$ et $x_n > 1$, la relation de Chasles donne :

$$0 = \int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt.$$

En déplaçant la première intégrale et en changeant le signe du numérateur, on obtient exactement l'identité demandée.

3. Méthode 1 — Factoriser une différence de puissances.

Pour $t \geq 1$, l'identité algébrique suivante vaut aussi lorsque $t = 1$:

$$t^{2n} - 1 = (t^2 - 1) \sum_{j=0}^{n-1} t^{2j}.$$

Chaque terme de la somme est supérieur ou égal à 1, et $t^2 - 1 \geq 0$. Ainsi $t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$.

Méthode 2 — Employer le binôme pour un accroissement positif.

Posons $u = t^2 - 1 \geq 0$. Par le binôme de Newton :

$$t^{2n} = (1 + u)^n = 1 + nu + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} u^j \geq 1 + nu,$$

où la somme est vide lorsque $n = 1$. Tous ses termes étant positifs ou nuls, on retrouve l'inégalité. La factorisation est adaptée à une différence de puissances ; le binôme permet de reconnaître plus généralement un premier terme dans une puissance de $1 + u$.

4. Pour $1 \leq t \leq x_n$, on peut diviser l'inégalité précédente par $t + 1 > 0$:

$$\frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \geq n \frac{t^2 - 1}{t + 1} = n(t - 1).$$

L'intégration sur $[1, x_n]$ respecte l'ordre, d'où :

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq n \int_1^{x_n} (t - 1) dt = \frac{n}{2} (x_n - 1)^2.$$

Pour $0 \leq t \leq 1$, on a $0 \leq 1 - t^{2n} \leq 1$. L'identité de 2 donne donc :

$$\frac{n}{2} (x_n - 1)^2 \leq \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t + 1} dt = \ln 2.$$

Comme $n > 0$ et $x_n - 1 > 0$, la prise de la racine carrée conduit à :

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

5. La borne supérieure précédente tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Le théorème d'encadrement implique $x_n - 1 \rightarrow 0$. Ainsi la suite (x_n) converge vers 1.

Exercice 3

1. Étude préliminaire

1.a. Pour $0 \leq x < 1$, les séries géométrique et géométrique dérivée sont convergentes et leurs sommes usuelles donnent :

$$s_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

$$s_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Il ne s'agit pas de dériver ici une série quelconque : on utilise les deux sommes usuelles du programme. Au point $x = 0$, la première série vaut 1 et la seconde 0, en accord avec les formules ; le monôme x^0 vaut 1, y compris en 0.

1.b. Pour $k < n$, les factorielles intervenant sont définies. Avec un dénominateur commun :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

On retrouve la formule de Pascal.

1.c. La convergence des séries $s_j(x)$ est admise dans le sujet pour chaque entier j . Les changements d'indice et les combinaisons linéaires suivants sont donc licites. On isole le premier terme, puis on pose $m = n - 1$ dans les suivants :

$$s_{k+1}(x) = x^{k+1} + x \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m+1}{k+1} x^m.$$

Pour $m \geq k + 1$, l'identité de 1.b est applicable. Elle donne :

$$s_{k+1}(x) = x^{k+1} + x \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k} x^m + x \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^m.$$

Puisque $\binom{k}{k} = 1$, la première série du membre de droite est $s_k(x) - x^k$ et la seconde est $s_{k+1}(x)$. Les termes isolés se compensent, et l'on obtient $s_{k+1}(x) = xs_k(x) + xs_{k+1}(x)$. Le calcul ne divise pas par x et vaut donc aussi en $x = 0$.

1.d. On raisonne par récurrence sur k , avec une propriété valable pour tout $x \in [0, 1[$. L'initialisation $k = 0$ est la formule de 1.a. Supposons $s_k(x) = x^k / (1 - x)^{k+1}$. La question 1.c donne $(1 - x)s_{k+1}(x) = xs_k(x)$. Comme $1 - x > 0$:

$$s_{k+1}(x) = \frac{x}{1 - x} \frac{x^k}{(1 - x)^{k+1}} = \frac{x^{k+1}}{(1 - x)^{k+2}}.$$

La récurrence est établie, avec la même convention sur le monôme de degré nul en $x = 0$.

2. Étude d'une expérience aléatoire

Question adaptée au programme actuel : l'indépendance des tirages avec remise est explicitée dans le préambule, pour préciser le modèle utilisé dans cette partie.

2.a. À chaque tirage, la probabilité de la boule noire est $p = 1/5$. Les tirages sont indépendants et la composition de l'urne est conservée par la remise. Le rang du premier succès suit donc une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$:

$$N \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right), \quad \mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Cette loi est presque sûrement finie et admet une espérance, égale à $\mathbb{E}(N) = 1/p = 5$.

2.b. L'événement $[N = n]$ a une probabilité strictement positive pour tout $n \geq 1$. Une fois cet événement réalisé, la seconde série comporte n essais de Bernoulli indépendants de probabilité $1/5$, dont les résultats ne dépendent pas de ceux de la première série. Ainsi la loi conditionnelle de X sachant $N = n$ est binomiale :

$$P(X = k \mid N = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

2.c. Les événements $[N = n]$, pour $n \geq 1$, forment un système complet à un événement nul près. La formule des probabilités totales donne :

$$P(X = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{16}{25}\right)^n.$$

Puisque $0 < 16/25 < 1$, la somme géométrique vaut $(16/25)/(1 - 16/25) = 16/9$. Ainsi $P(X = 0) = 4/9$.

2.d. Fixons $k \geq 1$. Les indices $n < k$ ne contribuent pas à la formule des probabilités totales. Pour $n \geq k$, le produit des probabilités calculées en 2.a et 2.b peut se regrouper ainsi :

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{4^{k+1}} \binom{n}{k} \left(\frac{16}{25}\right)^n.$$

La série est donc exactement celle de l'étude préliminaire, évaluée en $16/25 \in [0, 1[$:

$$P(X = k) = \frac{1}{4^{k+1}} s_k \left(\frac{16}{25}\right) = \frac{1}{4^{k+1}} \frac{(16/25)^k}{(9/25)^{k+1}} = \frac{25}{36} \left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

Cette dernière formule concerne $k \geq 1$; en $k = 0$, la probabilité est celle de 2.c.

2.e. Méthode 1 — Utiliser la loi marginale de X .

La variable X est positive ou nulle. L'existence de son espérance équivaut donc à la convergence de

$$\sum_{k \geq 1} kP(X = k).$$

Posons $q = 4/9 \in]0, 1[$. La série géométrique dérivée est convergente et fournit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = \frac{25}{36} \sum_{k=1}^{+\infty} kq^k = \frac{25}{36} \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{25}{36} \frac{4/9}{(5/9)^2} = 1.$$

Il y a convergence absolue puisque les termes sont positifs. Ainsi X admet une espérance et $E(X) = 1$.

Méthode 2 — Repartir de la loi du couple (N, X) .

Dans le cadre des couples discrets, le regroupement des sommes de termes positifs est permis. La somme définissant l'espérance, avant même de savoir si elle est finie, peut donc être écrite :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} kP(X = k, N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}.$$

La somme intérieure est le moment d'ordre un d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/5)$, soit $n/5$. L'expression devient

$$\frac{1}{5} \sum_{n \geq 1} nP(N = n) = E(N)/5 = 1.$$

Sa finitude prouve l'existence de $E(X)$ et donne la même valeur. Cette seconde preuve exploite les deux étapes de l'expérience sans utiliser de théorie de l'espérance conditionnelle.

2.f. Pour $k \geq 0$, le complément de $[X \leq k]$ est la réunion disjointe des événements

$[X = j]$, pour $j \geq k + 1$. Tous ces indices sont au moins égaux à 1, donc 2.d s'applique :

$$P(X > k) = \frac{25}{36} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^j = \frac{25}{36} \frac{(4/9)^{k+1}}{1 - 4/9} = \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

En passant au complémentaire, on obtient $P(X \leq k) = 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^k$, y compris en $k = 0$, où la formule retrouve $4/9$.

3. Étude d'une variable aléatoire à densité

Pour alléger les écritures, posons $\lambda = \ln 9 - \ln 4 = \ln(9/4) > 0$. On a alors $\ln(4/9) = -\lambda$ et $a = \ln(5/9)/\lambda < 0$. En particulier $e^{\lambda a} = 5/9$, ce qui donne, pour $x \geq a$:

$$\frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^x = e^{-\lambda(x-a)}.$$

3.a. La fonction s'écrit $F(x) = 0$ pour $x < a$ et $F(x) = 1 - e^{-\lambda(x-a)}$ pour $x \geq a$. Au point a , la deuxième expression vaut 0, donc les deux branches se raccordent continûment. Chaque branche étant continue sur son domaine, F est continue sur $\mathbb{R}$.

Sur $]a, +\infty[$, sa dérivée est $\lambda e^{-\lambda(x-a)} > 0$, tandis que sur $] - \infty, a[$, elle est nulle. La fonction est donc croissante et de classe C^1 sauf éventuellement en a . De plus :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Ces propriétés caractérisent la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Une telle variable Y existe donc.

3.b. On peut prendre la dérivée de F hors de a et attribuer la valeur 0 à la densité en a :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a, \\ \lambda e^{-\lambda(x-a)} & \text{si } x > a. \end{cases}$$

Cette fonction est positive ou nulle et continue sauf en a , avec des limites finies 0 à gauche et λ à droite. Pour tout $A > a$,

$$\int_a^A \lambda e^{-\lambda(t-a)} dt = 1 - e^{-\lambda(A-a)} \rightarrow 1.$$

Elle satisfait donc également la caractérisation directe d'une densité. Dans les notations initiales, sa branche non nulle est $-\frac{5}{9} \ln(4/9) e^{x \ln(4/9)}$.

3.c. Notons $\ell = \ln(4/9) = -\lambda \neq 0$. Par intégration par parties sur un segment, en prenant $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{\ell x}$:

$$\int x e^{\ell x} dx = \frac{x}{\ell} e^{\ell x} - \frac{1}{\ell} \int e^{\ell x} dx = \left(\frac{x}{\ell} - \frac{1}{\ell^2} \right) e^{\ell x} + C.$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ est donc $G(x) = (x/\ell - 1/\ell^2) e^{\ell x}$. En effet, la dérivée du produit est $(1/\ell) e^{\ell x} + (x/\ell - 1/\ell^2) \ell e^{\ell x} = x e^{\ell x}$.

3.d. Méthode 1 — Calculer l'intégrale d'espérance à l'aide de 3.c.

Il faut d'abord vérifier l'intégrabilité absolue. Sur le segment $[a, 0]$, la fonction $x \mapsto |x| \lambda e^{-\lambda(x-a)}$ est continue, donc intégrable. Sur $[0, +\infty[$, elle est proportionnelle à $x e^{-\lambda x}$. Les croissances comparées donnent $x^3 e^{-\lambda x} \rightarrow 0$; ainsi $x e^{-\lambda x} = o(1/x^2)$ à l'infini, ce qui assure sa convergence par comparaison à l'intégrale de Riemann d'exposant 2. Par conséquent Y admet une espérance.

Pour $A > a$, la primitive de 3.c, réécrite avec λ , donne :

$$\int_a^A x \lambda e^{-\lambda(x-a)} dx = \left[- \left(x + \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda(x-a)} \right]_a^A.$$

Le terme à la borne supérieure tend vers 0 par croissance comparée. Celui à la borne inférieure est $-(a + 1/\lambda)$. On conclut :

$$E(Y) = a + \frac{1}{\lambda} = \frac{1 - \ln 9 + \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}.$$

Méthode 2 — Reconnaître une transformation affine d'une exponentielle.

Posons $Z = Y - a$. Pour tout $z < 0$, on a $P(Z \leq z) = F(a + z) = 0$, et pour $z \geq 0$:

$$P(Z \leq z) = F(a + z) = 1 - e^{-\lambda z}.$$

Ainsi Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Elle admet une espérance $1/\lambda$; la variable $Y = a + Z$ admet alors une espérance par transformation affine et linéarité, égale à $a + 1/\lambda$. La première méthode applique la primitive demandée ; la seconde met en évidence la loi usuelle cachée par le décalage.

Relevé des adaptations

Exercice 2, partie I, question 6 : Code adapté en Python. L'objectif numérique et la précision de 10^{-3} sont conservés ; la dichotomie fournit un encadrement certifié de la même racine.

Exercice 3, partie 2, préambule : l'indépendance des tirages successifs avec remise est explicitée pour justifier les lois géométrique et binomiale utilisées dans le modèle.