



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2001

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre quatre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A .

1. Montrer que A n'est pas inversible. En déduire que 0 est valeur propre de A .

2.a. Calculer A^2, A^3, A^4 .

2.b. Établir que 0 est la seule valeur propre de f .

2.c. Déterminer la dimension du noyau de f .

2.d. Est-ce que f est diagonalisable ?

On note $\varepsilon_1 = e_1, \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$, et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

3.a. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

3.b. Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.

4. Existe-t-il un automorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Exercice 2

On considère l'application $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0, +\infty[$, par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } x > 0, \text{ et } f(0) = 1.$$

1.a. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

1.b. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$.

1.c. Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.

1.d. En déduire que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

2.a. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (xe^x - 2e^x + x + 2).$$

2.b. Étudier les variations de la fonction $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0, +\infty[$, par $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$.

En déduire que $\forall x > 0, f''(x) > 0$.

2.c. En déduire le sens de variation de f . On précisera sa limite en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f .

2.d. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

3.a. Montrer que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq f(x) \leq 1.$$

3.b. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$.

3.c. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|.$$

3.d. Établir que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3

1. Pour tout entier naturel n , on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = \frac{e^{-t}t^n}{n!} \text{ si } t > 0, \text{ et } f_n(t) = 0 \text{ si } t \leq 0.$$

1.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f_n(t) = 0$. En déduire que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt \text{ est convergente.}$$

1.b. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, +\infty[, \quad \int_0^x f_n(t) dt = -\frac{e^{-x}x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t) dt.$$

1.c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$.

1.d. Montrer que, pour tout entier naturel n , la fonction f_n est une densité de probabilité d'une variable aléatoire.

1. Pour tout entier naturel n , on définit la variable aléatoire X_n admettant f_n pour densité de probabilité.

1.a. Montrer que, pour tout entier naturel n , l'espérance et la variance de X_n vérifient

$$E(X_n) = n + 1, \quad V(X_n) = n + 1.$$

1.b. Dans cette question, on suppose que $n = 4$. On donne les valeurs approchées à 10^{-2} suivantes :

$$\int_0^4 f_4(t) dt \simeq 0,37, \quad \int_0^6 f_4(t) dt \simeq 0,71, \quad \int_0^8 f_4(t) dt \simeq 0,90.$$

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition de X_4 .

Déterminer une valeur décimale approchée de $P(X_4 > 4)$ et une valeur décimale approchée de $P(4 < X_4 \leq 8)$.

3. Pour tout réel $t > 0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant t .

On suppose que Y_t suit une loi de Poisson de paramètre t .

- 3.a. Rappeler, pour tout réel $t > 0$, les valeurs de l'espérance et de la variance de Y_t .

Pour tout entier naturel non nul n , on définit la variable aléatoire réelle Z_n , prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, égale à l'instant d'arrivée de la n -ième voiture au péage à partir de l'instant 0.

- 3.b. Soient $t \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité de l'événement $[Z_n \leq t]$ et de l'événement $[Y_t \geq n]$.

- 3.c. En déduire, pour tout entier naturel non nul n , la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle Z_n .

- 3.d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , la variable aléatoire Z_n admet f_{n-1} comme densité de probabilité.