



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2001

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1. Les première et quatrième colonnes sont opposées. Ainsi, pour $v = (1, 0, 0, 1)$, on a $v \neq 0$ et $Av = 0$. Le noyau de A n'est pas réduit au vecteur nul : A n'est pas inversible et 0 est une valeur propre de A .

2.a. La multiplication des lignes par les colonnes donne successivement

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, la première ligne de A^2 est la différence des première et quatrième lignes de A , soit $(1, 0, -1, 0)$; la première ligne de A^3 est la différence des première et troisième lignes de A , soit $(1, -1, 0, 0)$. Enfin, chaque ligne de A^3A est la différence des première et deuxième lignes de A , qui sont égales. Donc $A^4 = 0$.

2.b. Si λ est une valeur propre réelle de f , il existe $v \neq 0$ tel que $f(v) = \lambda v$. Par applications successives de f , $f^4(v) = \lambda^4 v$. La question précédente donne $f^4 = 0$, d'où $\lambda^4 v = 0$. Comme $v \neq 0$, $\lambda = 0$. Cette valeur est effectivement propre d'après 1 : c'est l'unique valeur propre de f .

2.c. Pour $v = (x, y, z, t)$, les équations $Av = 0$ sont $x - t = 0$, $y - t = 0$ et $z - t = 0$. Ainsi

$$\text{Ker } f = \{t(1, 1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 1, 1)),$$

et $\dim(\text{Ker } f) = 1$.

2.d. Si f était diagonalisable, il admettrait une base de quatre vecteurs propres. Tous appartiendraient à l'unique sous-espace propre $\text{Ker } f$, de dimension 1, ce qui est impossible. Donc f n'est pas diagonalisable.

3.a. Les premières colonnes de I , A , A^2 et A^3 fournissent

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (1, 1, 0, 0), \quad \varepsilon_3 = (1, 1, 1, 0), \quad \varepsilon_4 = (1, 1, 1, 1).$$

Si $a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 + d\varepsilon_4 = 0$, la quatrième coordonnée donne $d = 0$, puis les troisième, deuxième et première donnent successivement $c = b = a = 0$. La famille est libre et possède quatre éléments dans $\mathbb{R}^4$: c'est une base.

3.b. Par définition, $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$, $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_3$, $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_4$. De plus $f(\varepsilon_4) = f^4(e_1) = 0$. Les colonnes des coordonnées de ces images dans $\mathcal{C}$ donnent

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Méthode 1 — Comparaison des noyaux.

La matrice N montre que $\text{Ker } f = \text{Vect}(\varepsilon_4)$, alors que $\text{Ker}(f^2) = \text{Vect}(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$. Les dimensions sont respectivement 1 et 2.

Pour tout automorphisme g et tout vecteur v , on a

$$g \circ f \circ g^{-1}(v) = 0 \iff f(g^{-1}(v)) = 0 \iff v \in g(\text{Ker } f).$$

L'application g est donc un isomorphisme de $\text{Ker } f$ sur $\text{Ker}(g \circ f \circ g^{-1})$; ces noyaux ont même dimension. Ils ne peuvent avoir la dimension 2 de $\text{Ker}(f^2)$. Il n'existe pas d'automorphisme répondant à la question.

Méthode 2 — Comparaison de puissances.

Cette approche exploite directement les produits calculés en 2.a. Si $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$, en composant deux fois, on aurait

$$g \circ f^2 \circ g^{-1} = (f^2)^2 = f^4 = 0.$$

La composition à gauche par g^{-1} et à droite par g donnerait $f^2 = 0$, ce qui contredit $A^2 \neq 0$. Cette seconde preuve est particulièrement courte lorsqu'une puissance de f s'annule mais qu'une puissance inférieure ne s'annule pas.

Exercice 2

1.a. Sur $]0, +\infty[$, le dénominateur $e^x - 1$ est strictement positif et les fonctions du quotient sont continues. En 0, la définition de la dérivée de l'exponentielle donne

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

En prenant l'inverse, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$. Donc f est continue sur $[0, +\infty[$.

1.b. Sur $]0, +\infty[$, le quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas est de classe C^1 . La dérivée du quotient donne

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}.$$

1.c. Pour ne pas effectuer de calcul de développement limité par produit, appliquons Taylor-Young directement à $h(x) = (1 - x)e^x - 1$, qui est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On a

$$h(0) = 0, \quad h'(x) = -xe^x, \quad h'(0) = 0, \quad h''(x) = -(1 + x)e^x, \quad h''(0) = -1.$$

Taylor-Young à l'ordre 2 fournit $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) \rightarrow 0$. Par 1.a, $(e^x - 1)/x \rightarrow 1$. Par conséquent,

$$f'(x) = \frac{-1/2 + \epsilon(x)}{((e^x - 1)/x)^2} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

1.d. Il reste à prouver directement la dérivabilité à droite en 0. Pour $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}.$$

La fonction $k(x) = x - e^x + 1$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie $k(0) = k'(0) = 0$, $k''(0) = -1$. Taylor-Young, appliqué directement à k , donne $k(x) = -x^2/2 + x^2\eta(x)$ avec $\eta(x) \rightarrow 0$. Le quotient précédent vaut donc

$$\frac{-1/2 + \eta(x)}{(e^x - 1)/x} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Ainsi f est dérivable à droite en 0, avec $f'(0) = -1/2$. La limite obtenue en 1.c est égale à cette dérivée. La dérivée est continue en 0 et sur $]0, +\infty[$; f est donc de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, avec la convention usuelle de dérivée à droite à la borne.

2.a. Le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, donc f y est de classe C^2 . Avec h défini en 1.c,

$$f''(x) = \frac{-xe^x(e^x - 1) - 2e^x((1 - x)e^x - 1)}{(e^x - 1)^3}.$$

Le numérateur est égal à

$$e^x[-xe^x + x - 2e^x + 2xe^x + 2] = e^x[xe^x - 2e^x + x + 2].$$

$$\text{On obtient donc bien } f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2).$$

2.b. La fonction g est deux fois dérivable et

$$g'(x) = (x - 1)e^x + 1, \quad g''(x) = xe^x.$$

Ainsi $g''(x) > 0$ pour $x > 0$. La fonction g' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $g'(0) = 0$; donc $g'(x) > 0$ pour $x > 0$. À son tour, g est strictement croissante sur cet intervalle et $g(0) = 0$. En particulier $g(x) > 0$ pour $x > 0$. Sa limite en $+\infty$ est $+\infty$, puisque $g(x) = (x - 2)e^x + x + 2$.

Tous les autres facteurs de $f''(x)$ sont strictement positifs sur $]0, +\infty[$: $f''(x) > 0$ sur cet intervalle.

2.c. La question précédente prouve que f' est strictement croissante. Pour déterminer son signe, remarquons que le numérateur h de 1.b vérifie $h(0) = 0$ et $h'(x) = -xe^x < 0$

pour $x > 0$. Donc $h(x) < 0$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. Avec $f'(0) = -1/2$, la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

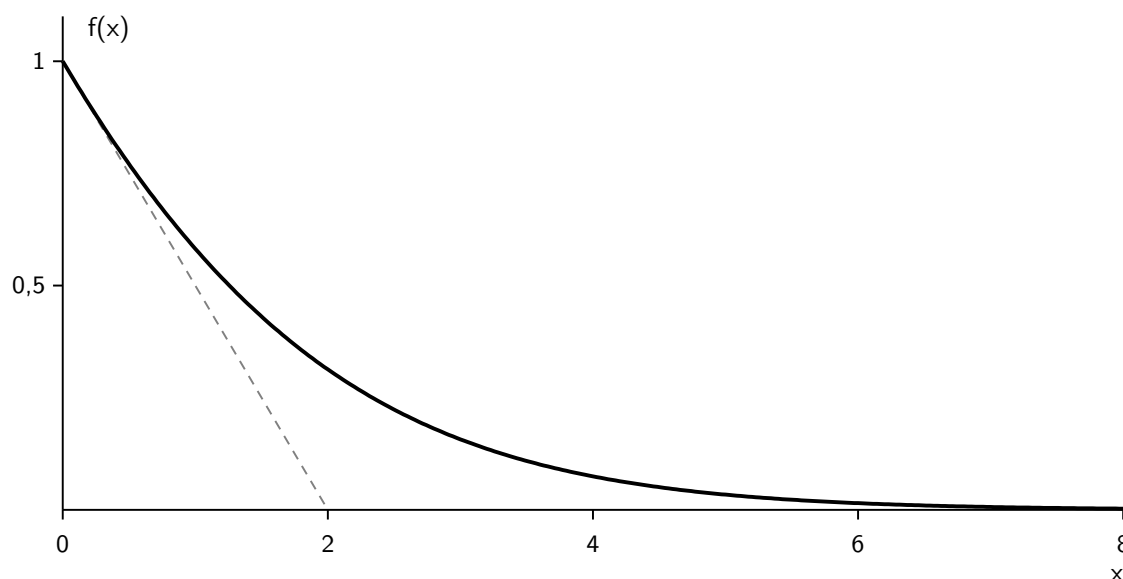
Les croissances comparées donnent $xe^{-x} \rightarrow 0$, tandis que $1 - e^{-x} \rightarrow 1$. Ainsi

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} \rightarrow 0.$$

Le tableau de variation est le suivant :

x	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-1/2$	négatif
variation de f	1	décroît vers 0

2.d. La courbe part de $(0, 1)$ avec une tangente de pente $-1/2$, d'équation $y = 1 - x/2$. Elle est strictement décroissante et strictement convexe pour $x > 0$, reste au-dessus de l'axe des abscisses et admet $y = 0$ comme asymptote en $+\infty$. Voici son allure ; le segment pointillé représente la tangente en 0.



3.a. Comme f' est croissante et $f'(0) = -1/2$, on a $f'(x) \geq -1/2$ pour tout $x \geq 0$. La question 2.c donne aussi $f'(x) \leq 0$. Donc $|f'(x)| \leq 1/2$ sur $[0, +\infty[$. Puisque f décroît de 1 vers 0 et reste positive, $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \geq 0$.

3.b. Pour $x > 0$, on peut diviser par x et le dénominateur est non nul. Ainsi

$$f(x) = x \iff \frac{1}{e^x - 1} = 1 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2.$$

Comme $\ln 2 > 0$, c'est bien l'unique solution dans l'intervalle demandé. En outre $f(0) = 1 \neq 0$: aucun autre point fixe n'apparaît à la borne.

3.c. La suite est bien définie : $u_0 = 0$ appartient au domaine de f , et 3.a garantit par récurrence que tous les u_n appartiennent à $[0, 1]$. La fonction f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, et sa dérivée y est majorée en valeur absolue par $1/2$. L'inégalité des accroissements finis s'applique au segment d'extrémités u_n et $\ln 2$, toutes deux positives ou nulles. Comme $f(\ln 2) = \ln 2$,

$$|u_{n+1} - \ln 2| = |f(u_n) - f(\ln 2)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|.$$

3.d. En itérant la majoration de 3.c, une récurrence donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ln 2| = \frac{\ln 2}{2^n}.$$

Le membre de droite tend vers 0 ; par encadrement $u_n \rightarrow \ln 2$. Cette preuve établit la convergence sans supposer la suite monotone.

Exercice 3

Étude des fonctions f_n

1.a. Pour $t > 0$,

$$t^2 f_n(t) = \frac{t^{n+2} e^{-t}}{n!} \longrightarrow 0$$

par croissance comparée de l'exponentielle et des puissances. Pour chaque n fixé, il existe donc $T \geq 1$ tel que $0 \leq f_n(t) \leq 1/t^2$ pour $t \geq T$. L'intégrale de Riemann

$\int_T^{+\infty} dt/t^2$ converge. Le critère de comparaison des fonctions positives assure alors la convergence de l'intégrale de f_n sur $[T, +\infty[$.

Sur $]0, T]$, l'expression $e^{-t} t^n / n!$ se prolonge continûment en 0, par 0 si $n \geq 1$, par 1 si

$n = 0$. Sa valeur éventuellement différente en un point n'affecte pas l'intégrale.

L'intégrale sur $[0, T]$ est donc finie et $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ converge.

1.b. Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, les fonctions utilisées sont de classe C^1 sur le segment $[0, x]$.

Une intégration par parties, avec $u(t) = t^n/n!$ et $v'(t) = e^{-t}$, donne

$$\int_0^x \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt = \left[-\frac{t^n e^{-t}}{n!} \right]_0^x + \int_0^x \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} dt.$$

Comme $n \geq 1$, le terme de bord en 0 est nul. Cela donne l'identité demandée. Pour $x = 0$, les deux intégrales et le terme x^n sont nuls : l'identité reste valable.

1.c. Rectification de l'énoncé source : la borne supérieure de l'intégrale est $+\infty$, et non x .

Une intégrale de 0 à x ne peut pas être constamment égale à 1, notamment pour $x = 0$.

Posons $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$, qui existe d'après 1.a. Pour $n = 0$, $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

Pour $n \geq 1$, faisons tendre x vers $+\infty$ dans l'identité sur segment de 1.b. Les deux intégrales ont une limite finie par 1.a et $e^{-x} x^n/n! \rightarrow 0$ par croissance comparée. Ainsi $I_n = I_{n-1}$. Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = 1.$$

1.d. Pour tout n , f_n est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, et possède des limites finies à gauche et à droite en 0. Pour $n = 0$, ces limites sont respectivement 0 et 1 ; pour $n \geq 1$, elles sont toutes deux nulles. Enfin son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1 d'après 1.c. Toutes les conditions d'une densité de probabilité sont satisfaites.

Étude des variables X_n

1.a. On étudie directement les moments par transfert, sans utiliser une loi particulière comme résultat de cours. Pour $t > 0$,

$$t f_n(t) = (n+1) f_{n+1}(t), \quad t^2 f_n(t) = (n+1)(n+2) f_{n+2}(t).$$

Les deux fonctions du membre de droite sont positives et intégrables par 1.c du groupe précédent. Les intégrales définissant l'espérance et le moment d'ordre deux convergent

donc absolument. Ainsi

$$E(X_n) = (n+1) \int_0^{+\infty} f_{n+1}(t) dt = n+1,$$

$$E(X_n^2) = (n+1)(n+2) \int_0^{+\infty} f_{n+2}(t) dt = (n+1)(n+2).$$

La formule de Koenig-Huygens s'applique et donne

$$V(X_n) = (n+1)(n+2) - (n+1)^2 = n+1.$$

1.b. Notons F_4 la fonction de répartition de X_4 . Elle vaut 0 pour $x \leq 0$ et $\int_0^x f_4(t) dt$ pour $x > 0$. Elle est continue, croissante, et tend vers 1 en $+\infty$.

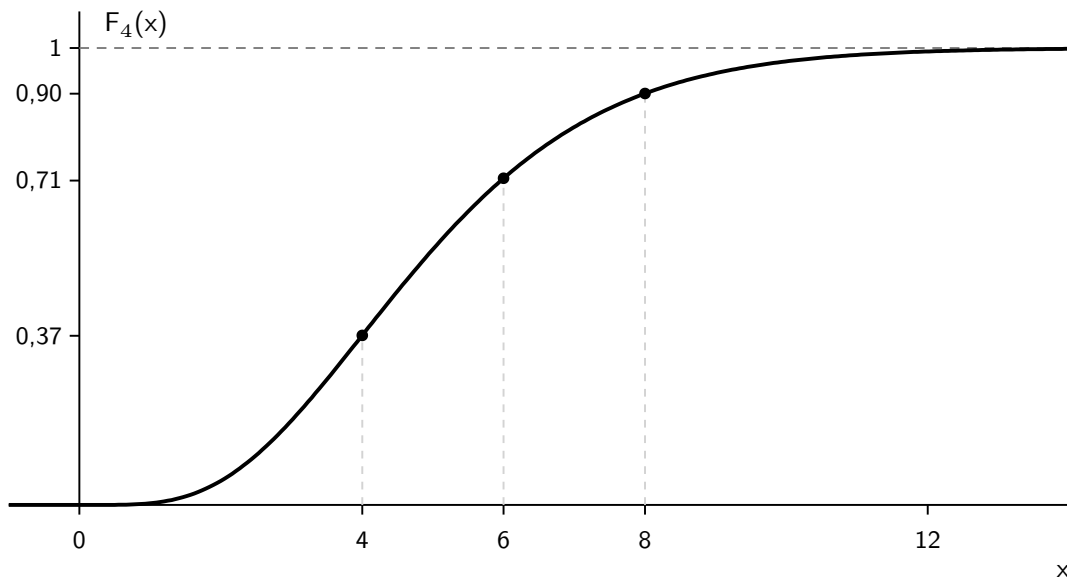
Pour préciser la courbe, la formule de 1.b du premier groupe, appliquée successivement aux indices 4, 3, 2, 1, avec $\int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$, donne

$$\forall x \geq 0, \quad F_4(x) = 1 - e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right).$$

Pour $x > 0$, $F_4'(x) = f_4(x) > 0$ et

$$F_4''(x) = \frac{e^{-x}x^3(4-x)}{24}.$$

La courbe est donc convexe sur $]0, 4[$, puis concave sur $]4, +\infty[$. Elle passe par les points dont les ordonnées approchées sont données ; elle possède une tangente horizontale en 0 et l'asymptote horizontale $y = 1$ en $+\infty$.



Comme X_4 est à densité, les points ont une probabilité nulle. On obtient avec les valeurs données

$$P(X_4 > 4) = 1 - F_4(4) \simeq 1 - 0,37 = 0,63,$$

$$P(4 < X_4 \leq 8) = F_4(8) - F_4(4) \simeq 0,90 - 0,37 = 0,53.$$

Étude du nombre de voitures et des instants d'arrivée

3.a. La loi de Poisson de paramètre $t > 0$ admet une espérance et une variance finies, toutes deux égales à son paramètre. Donc $E(Y_t) = t$ et $V(Y_t) = t$.

3.b. La n -ième voiture est arrivée au plus tard à l'instant t si et seulement si au moins n voitures sont arrivées à cet instant. C'est exactement l'égalité des événements

$$[Z_n \leq t] = [Y_t \geq n].$$

3.c. Pour $t > 0$, l'égalité précédente et la loi de Poisson donnent

$$P(Z_n \leq t) = 1 - P(Y_t \leq n-1) = 1 - e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}.$$

Pour $t < 0$, la probabilité est nulle car Z_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. En 0, on doit aussi

vérifier l'absence d'un atome : pour tout $t > 0$,

$$0 \leq P(Z_n = 0) \leq P(Z_n \leq t) = 1 - e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \rightarrow 0.$$

Ainsi la fonction de répartition est

$$F_{Z_n}(t) = 0 \text{ si } t \leq 0, \quad F_{Z_n}(t) = 1 - e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \text{ si } t > 0.$$

3.d. La fonction précédente est continue en 0, car sa limite à droite y est nulle. Elle est de classe C^1 sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Pour $t > 0$, posons

$$S(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k / k!.$$

Sa dérivée est

$$S'(t) = \sum_{k=0}^{n-2} t^k / k!$$

si $n \geq 2$, et $S'(t) = 0$ si $n = 1$. Dans les deux cas, $S(t) - S'(t) = t^{n-1} / (n-1)!$.

Par dérivation d'une somme finie,

$$F'_{Z_n}(t) = e^{-t}(S(t) - S'(t)) = \frac{e^{-t}t^{n-1}}{(n-1)!} = f_{n-1}(t).$$

Pour $t < 0$, la dérivée est nulle et vaut aussi $f_{n-1}(t)$. On peut choisir la valeur 0 pour la densité au point 0. La fonction F_{Z_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement en 0 ; Z_n est donc une variable à densité et f_{n-1} est une de ses densités.

Relevé des adaptations

Exercice 3, premier groupe 1.c : la borne supérieure x de l'intégrale est remplacée par $+\infty$, afin de rectifier la normalisation fausse de l'énoncé source et de rendre cohérente la question suivante sur les densités.