



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2000

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre trois :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice J dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère, pour tout nombre réel a , la matrice carrée réelle d'ordre trois :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

- 1.a. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
- 1.b. Montrer que J est diagonalisable. Déterminer une matrice réelle diagonale D d'ordre trois et une matrice réelle inversible P d'ordre trois telles que $J = PDP^{-1}$.
- 1.c. En déduire que, pour tout nombre réel a , il existe une matrice réelle diagonale D_a d'ordre trois, que l'on calculera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.
- 1.d. Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que M_a soit inversible ?
2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice X carrée réelle d'ordre trois vérifiant $X^2 = M_a$.
 - 2.a. Soient a un nombre réel et X une matrice carrée réelle d'ordre trois tels que $X^2 = M_a$.
 - 2.a.α. Montrer que X commute avec M_a , puis que X commute avec J .
 - 2.a.β. On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice X dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de f est vecteur propre de h .

2.a.γ. Établir qu'il existe une matrice réelle diagonale Δ d'ordre trois telle que $X = P\Delta P^{-1}$ et montrer : $\Delta^2 = D_a$.

2.a.δ. En déduire : $a \geq 2$.

2.b. Réciproquement, montrer que, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 2, il existe une matrice carrée réelle X d'ordre trois telle que $X^2 = M_a$.

2.c. Conclure.

Exercice 2

On considère la fonction $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, par :

$$f(x) = 1 \quad \text{si } x = 0, \quad f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{si } x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[.$$

1.a. Montrer que f est continue sur $] -1, +\infty[$.

1.b. Montrer que f est de classe C^1 sur $] -1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$.

1.c. Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.

1.d. En déduire que f est de classe C^1 sur $] -1, +\infty[$.

2. Montrer : $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \frac{x}{x+1} - \ln(1+x) \leq 0$.

En déduire les variations de f . On précisera les limites de f en -1 et $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, l'intégrale $\int_x^{2x} f(t) dt$ existe.

4. On considère la fonction $F :]-\frac{1}{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt.$$

4.a. Montrer que F est dérivable sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$ et que F est croissante.

4.b. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad F(x) \geq x f(2x)$.

4.c. En déduire que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

4.d. Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{-1/2} f(t) dt$ est convergente. Ici, sa convergence signifie que $\int_c^{-1/2} f(t) dt$ admet une limite finie lorsque $c \rightarrow -1^+$.

On pourra utiliser le changement de variable $u = 1 + t$ et vérifier que $u \mapsto u \ln u - u$ est une primitive de $\ln u$ sur $]0, +\infty[$, afin de majorer les intégrales tronquées.

En déduire que la fonction F admet une limite finie en $-\frac{1}{2}$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.

Exercice 3

Soit a un entier strictement positif.

On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes, avec $n = 16$ ou $n = 26$, qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants :

I. Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite, jusqu'à obtenir le premier roi rouge.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $E(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, \dots, 2n-1\}, \quad P(X = k) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}.$

2. Montrer : $E(X) = \frac{2n+1}{3}$.

On rappelle que, pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^p k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

3. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la k -ième carte découverte, G_1 est égale à $a - k$.

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1 .

II. Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci le joueur peut découvrir au maximum n cartes.

Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la k -ième carte découverte, avec $k \leq n$, G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer $P(G_2 = a - k)$.

2. Vérifier : $P(G_2 = -n) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$.

3. Montrer : $E(G_2) = \frac{3(3n-1)a - (7n^2 - 1)}{6(2n-1)}.$

III. Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes, donc $n = 16$.

Déterminer, selon les valeurs de a , le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.