



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1 — Option économique

2000

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1.a. On recherche les vecteurs propres sans calcul de déterminant. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tels que $Jv = \lambda v$. Les trois coordonnées donnent

$$2y + z = \lambda x, \quad -y + 2z = \lambda y, \quad y = \lambda z.$$

En remplaçant y par λz dans la deuxième égalité, on obtient $(\lambda^2 + \lambda - 2)z = 0$.

Si $z = 0$, la troisième égalité impose $y = 0$, puis $x \neq 0$ et $\lambda = 0$. Réciproquement, pour $\lambda = 0$, les équations imposent $y = z = 0$, et x est libre.

Si $z \neq 0$, alors $(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$, donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$.

Pour $\lambda = 1$, on a $y = z$ et $x = 3z$. Pour $\lambda = -2$, on a $y = -2z$ et $x = 3z/2$.

Les trois valeurs sont effectivement propres, avec les sous-espaces propres suivants :

$$E_0(f) = \text{Vect}((1, 0, 0)), \quad E_1(f) = \text{Vect}((3, 1, 1)), \quad E_{-2}(f) = \text{Vect}((3, -4, 2)).$$

Ainsi $\text{Sp}(f) = \{0, 1, -2\}$ et chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.

1.b. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre. Les trois vecteurs précédents forment donc une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice J est diagonalisable.

En choisissant les colonnes dans l'ordre $0, 1, -2$, on peut prendre

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice P est inversible parce que ses colonnes forment une base. Les relations sur les vecteurs propres donnent $JP = PD$, d'où $J = PDP^{-1}$.

Pour expliciter également l'inverse, si $(x, y, z) = s(1, 0, 0) + t(3, 1, 1) + u(3, -4, 2)$, alors $u = (z - y)/6$, $t = (y + 2z)/3$ et $s = x - y/2 - 5z/2$. Par conséquent,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

1.c. La définition donne $M_a = aI_3 + J$, donc

$$M_a = P(aI_3 + D)P^{-1}.$$

On peut ainsi choisir $D_a = \text{diag}(a, a + 1, a - 2)$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

1.d. Si les trois nombres a , $a + 1$ et $a - 2$ sont non nuls, la matrice diagonale D_a admet l'inverse $\text{diag}(1/a, 1/(a + 1), 1/(a - 2))$. La matrice $PD_a^{-1}P^{-1}$ est alors un inverse de M_a .

Si l'un des trois nombres est nul, le vecteur propre correspondant, qui est non nul, appartient au noyau de M_a ; cette matrice n'est donc pas inversible.

L'ensemble demandé est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\}$.

2.a.α. Puisque $M_a = X^2$, l'associativité du produit matriciel donne

$$XM_a = XX^2 = X^3 = X^2X = M_aX.$$

Comme $J = M_a - aI_3$ et que toute matrice commute avec I_3 , on en déduit

$$XJ = XM_a - aX = M_aX - aX = JX.$$

2.a.β. L'égalité $XJ = JX$ signifie que $h \circ f = f \circ h$. Soit $v \neq 0$ un vecteur propre de f associé à λ . Alors

$$f(h(v)) = h(f(v)) = h(\lambda v) = \lambda h(v).$$

Ainsi $h(v)$ appartient à $E_\lambda(f)$, y compris lorsque $h(v) = 0$. Or, d'après 1.a, $E_\lambda(f)$ est une droite engendrée par v . Il existe donc un réel μ tel que $h(v) = \mu v$.

Comme $v \neq 0$, il est vecteur propre de h , éventuellement pour la valeur propre $\mu = 0$. Le caractère unidimensionnel des sous-espaces propres de f est essentiel à ce raisonnement.

2.a.γ. Les trois colonnes de P sont donc aussi des vecteurs propres de h . Notons μ_0, μ_1 et μ_{-2} les réels correspondants et posons $\Delta = \text{diag}(\mu_0, \mu_1, \mu_{-2})$. On a $XP = P\Delta$, donc $X = P\Delta P^{-1}$.

En élevant au carré et en utilisant $P^{-1}P = I_3$, il vient

$$M_a = X^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PD_a P^{-1}.$$

La multiplication à gauche par P^{-1} puis à droite par P donne $\Delta^2 = D_a$.

2.a.δ. Les coefficients diagonaux de Δ^2 sont des carrés de réels. Ils sont tous positifs ou nuls. L'égalité précédente impose donc

$$a \geq 0, \quad a + 1 \geq 0, \quad a - 2 \geq 0.$$

La dernière condition implique les deux autres ; en particulier $a \geq 2$.

2.b. Soit $a \geq 2$. Les trois nombres $a, a + 1$ et $a - 2$ sont positifs ou nuls, donc leurs racines carrées réelles sont définies. Posons

$$\Delta = \text{diag}(\sqrt{a}, \sqrt{a+1}, \sqrt{a-2}), \quad X = P\Delta P^{-1}.$$

Cette matrice est réelle et vérifie

$$X^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PD_a P^{-1} = M_a.$$

Cette construction reste valable pour $a = 2$: le troisième coefficient diagonal est alors nul.

2.c. Les questions 2.a et 2.b établissent respectivement la nécessité et la suffisance.

L'ensemble des réels a pour lesquels il existe une matrice réelle X telle que $X^2 = M_a$ est donc $[2, +\infty[$.

Exercice 2

1.a. Sur chacun des intervalles $] -1, 0[$ et $]0, +\infty[$, f est le quotient de deux fonctions continues et son dénominateur ne s'annule pas. Elle y est donc continue.

Au voisinage de 0, le taux d'accroissement usuel du logarithme donne

$\ln(1+x)/x \rightarrow 1 = f(0)$. La fonction f est donc également continue en 0, et finalement sur $] -1, +\infty[$.

1.b. Sur les deux intervalles considérés, le numérateur est de classe C^1 et le dénominateur ne s'annule pas. Pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{x/(1+x) - \ln(1+x)}{x^2}.$$

Cette expression est continue sur chacun de ces intervalles, ce qui établit la régularité demandée.

1.c. On applique directement Taylor-Young à une fonction auxiliaire de classe C^2 , sans supposer de règle de calcul sur les développements limités. Posons

$$q(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x), \quad x > -1.$$

Cette fonction est de classe C^2 , avec

$$q'(x) = -\frac{x}{(1+x)^2}, \quad q''(x) = \frac{x-1}{(1+x)^3}.$$

On a $q(0) = q'(0) = 0$ et $q''(0) = -1$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 donne donc $q(x) = -x^2/2 + x^2\varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

Pour $x \neq 0$, $f'(x) = q(x)/x^2 = -1/2 + \varepsilon(x)$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -1/2$.

1.d. Il reste à établir la dérivabilité de f en 0, car la seule limite de f' ne suffit pas ici sans résultat supplémentaire. On calcule directement le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \quad (x \neq 0).$$

La fonction $r(x) = \ln(1+x) - x$ est de classe C^2 au voisinage de 0, avec $r(0) = r'(0) = 0$ et $r''(0) = -1$. Taylor-Young appliqué à r donne $r(x) = -x^2/2 + x^2\eta(x)$ avec $\eta(x) \rightarrow 0$.

Le taux d'accroissement tend donc vers $-1/2$. La fonction f est dérivable en 0 et

$f'(0) = -1/2$. La question 1.c montre alors la continuité de f' en 0. Avec 1.b, cela prouve que f est de classe C^1 sur $] -1, +\infty[$.

2. La fonction q introduite en 1.c vérifie $q'(x) = -x/(1+x)^2$. Elle est donc strictement croissante sur $] -1, 0]$ puis strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Son maximum est $q(0) = 0$. Ainsi $q(x) \leq 0$ pour tout $x > -1$, avec égalité seulement pour $x = 0$.

Pour $x \neq 0$, l'expression de 1.b montre que $f'(x) < 0$. En 0, on a aussi $f'(0) = -1/2 < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur tout son domaine.

Lorsque $x \rightarrow -1^+$, $\ln(1+x) \rightarrow -\infty$ et $x \rightarrow -1$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on écrit

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} \frac{1+x}{x} \rightarrow 0$$

par croissance comparée du logarithme et de la fonction identité. Le tableau de variations se résume ainsi : f décroît strictement de $+\infty$ à 0, avec $f(0) = 1$. En outre, $f(x) > 0$ partout : hors de 0, x et $\ln(1+x)$ ont le même signe.

3. Soit $x > -1/2$. Alors $x > -1$ et $2x > -1$. Le segment dont les extrémités sont x et $2x$ est donc inclus dans $] -1, +\infty[$. La fonction f étant continue sur cet intervalle, son intégrale sur ce segment existe. L'intégrale orientée $\int_x^{2x} f(t) dt$ est donc définie, que x soit négatif, nul ou positif.

4.a. La continuité de f assure l'existence d'une primitive H sur $] -1, +\infty[$. On a $F(x) = H(2x) - H(x)$. Par dérivation des compositions,

$$F'(x) = 2f(2x) - f(x).$$

En 0, cette égalité donne $F'(0) = 2 - 1 = 1 > 0$. Pour $x \neq 0$,

$$F'(x) = \frac{\ln(1+2x) - \ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right).$$

Les deux termes du quotient dans le logarithme sont strictement positifs. De plus, $(1+2x)/(1+x) - 1 = x/(1+x)$ a le même signe que x . Si $x > 0$, le logarithme est positif; si $-1/2 < x < 0$, il est négatif. Dans les deux cas, $F'(x) > 0$.

La fonction F est donc dérivable et même strictement croissante sur $] -1/2, +\infty[$.

4.b. Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [x, 2x]$, la décroissance de f donne $f(t) \geq f(2x)$. En intégrant cette inégalité sur un segment de longueur x , on obtient

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt \geq \int_x^{2x} f(2x) dt = xf(2x).$$

4.c. Pour $x > 0$, le minorant précédent s'écrit

$$xf(2x) = \frac{1}{2} \ln(1 + 2x).$$

Il tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. L'inégalité de 4.b entraîne donc $F(x) \rightarrow +\infty$.

4.d. Question adaptée au programme actuel : la définition de la convergence à cette borne singulière et un guidage par primitive ont été ajoutés. On raisonne sur des segments, puis sur leurs limites.

Pour $-1 < t \leq -1/2$, on a $1/2 \leq -t < 1$ et $0 < 1 + t \leq 1/2$. Ainsi

$$0 < f(t) = \frac{-\ln(1+t)}{-t} \leq -2\ln(1+t).$$

Pour $c \in]-1, -1/2[$, le changement de variable affine $u = 1 + t$, effectué sur le segment $[c, -1/2]$, donne

$$\int_c^{-1/2} -2\ln(1+t) dt = [-2u \ln u + 2u]_{c+1}^{1/2}.$$

Comme $u \ln u \rightarrow 0$ quand $u \rightarrow 0^+$, cette expression tend vers $1 + \ln 2$, et est au plus

$1 + \ln 2$. Les intégrales $I(c) = \int_c^{-1/2} f(t) dt$ sont donc positives et majorées par $1 + \ln 2$.

Puisque f est positive, $I(c)$ augmente lorsque c diminue vers -1 . Le théorème de la limite monotone assure l'existence d'une limite finie I . C'est précisément la convergence de l'intégrale demandée.

Pour en déduire la limite de F , choisissons la primitive $H(t) = \int_{-1/2}^t f(s) ds$. Pour $t \in]-1, -1/2[$, $H(t) = -I(t)$, donc $H(t) \rightarrow -I$ lorsque $t \rightarrow -1^+$. Par continuité, $H(x) \rightarrow H(-1/2) = 0$ lorsque $x \rightarrow -1/2^+$.

L'identité $F(x) = H(2x) - H(x)$ donne finalement $\lim_{x \rightarrow -1/2^+} F(x) = -I$, qui est finie. La valeur de I n'a pas besoin d'être calculée.

Exercice 3

I. Premier protocole

1. Le premier roi rouge peut apparaître aux rangs 1 à $2n - 1$; il ne peut pas apparaître seulement au dernier rang, car il y a deux rois rouges.

Méthode 1 — Positions des deux rois rouges

L'alignement aléatoire rend équiprobables les paires de positions des deux rois rouges. Il y en a $\binom{2n}{2} = n(2n - 1)$. L'événement $[X = k]$ impose que la plus petite position soit k ; l'autre position peut alors être l'une des $2n - k$ positions $k + 1, \dots, 2n$.

Par équiprobabilité, $P(X = k) = (2n - k)/(n(2n - 1))$ pour tout $k \in \{1, \dots, 2n - 1\}$.

Méthode 2 — Probabilités successives sans remise

L'événement $[X = k]$ impose d'abord $k - 1$ cartes non rouges, puis un roi rouge. La formule des probabilités composées donne

$$P(X = k) = \left(\prod_{j=0}^{k-2} \frac{2n - 2 - j}{2n - j} \right) \frac{2}{2n - k + 1},$$

où le produit est égal à 1 pour $k = 1$. En simplifiant les facteurs communs, le produit vaut $(2n - k + 1)(2n - k)/(2n(2n - 1))$. On retrouve donc

$$P(X = k) = (2n - k)/(n(2n - 1)).$$

La première méthode décrit directement les positions dans l'alignement ; la seconde convient lorsqu'on suit les cartes découvertes au fur et à mesure. Elle ne suppose pas les tirages indépendants.

2. La variable X a un support fini, donc son espérance existe.

Méthode 1 — Somme à partir de la loi

En posant $m = 2n - 1$, la formule de l'espérance donne

$$E(X) = \frac{2n \sum_{k=1}^m k - \sum_{k=1}^m k^2}{n(2n-1)}.$$

Les sommes usuelles conduisent à

$$2n \sum_{k=1}^m k - \sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)}{6} (6n - (2m+1)) = \frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{6}.$$

Après division par $n(2n-1)$, on obtient $E(X) = (2n+1)/3$.

Méthode 2 — Comptage des cartes effectivement découvertes

Pour toute réalisation de X , le nombre X est la somme des indicatrices des événements $[X \geq j]$, pour $1 \leq j \leq 2n-1$. Ainsi, par linéarité sur une somme finie,

$$E(X) = \sum_{j=1}^{2n-1} P(X \geq j).$$

Pour avoir $X \geq j$, les deux positions rouges doivent appartenir aux $2n - j + 1$ dernières places. Le même comptage élémentaire que précédemment donne

$$P(X \geq j) = \frac{(2n - j + 1)(2n - j)}{2n(2n - 1)}.$$

En posant $r = 2n - j$ et $m = 2n - 1$, on obtient

$$E(X) = \frac{\sum_{r=1}^m (r^2 + r)}{2n(2n - 1)} = \frac{m(m + 1)(m + 2)}{6n(2n - 1)} = \frac{2n + 1}{3}.$$

Cette deuxième méthode transforme une durée en somme de probabilités de poursuite ; elle sera utile pour le coût plafonné du deuxième protocole.

3. On a $G_1 = a - X$. Cette variable a un support fini et admet donc une espérance. Par linéarité,

$$E(G_1) = a - E(X) = a - \frac{2n + 1}{3}.$$

II. Deuxième protocole

1. Pour $1 \leq k \leq n$, le gain $a - k$ correspond à la découverte du premier roi rouge au rang k . Ces gains sont distincts entre eux. Ils sont aussi distincts de $-n$, puisque $a > 0$ entraîne $a - k \geq a - n > -n$.

La disposition aléatoire est la même que dans le premier protocole. Par conséquent,

$$P(G_2 = a - k) = P(X = k) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)} \quad (1 \leq k \leq n).$$

2. Le gain $-n$ correspond à l'absence des deux rois rouges parmi les n premières cartes, c'est-à-dire à $X > n$. Les deux rois doivent alors être dans les n dernières positions.

Le nombre de paires de positions favorables est $\binom{n}{2}$, pour $\binom{2n}{2}$ paires équiprobables au

total. Ainsi

$$P(G_2 = -n) = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{2n}{2}} = \frac{n-1}{2(2n-1)}.$$

Les valeurs $n = 16$ et $n = 26$ assurent que les binomiaux utilisés sont définis, et les dénominateurs sont strictement positifs.

3. La variable G_2 a un support fini ; son espérance existe.

Méthode 1 — Espérance calculée à partir des gains

Les probabilités précédentes donnent

$$E(G_2) = \frac{a \sum_{k=1}^n (2n-k) - \sum_{k=1}^n k(2n-k)}{n(2n-1)} - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}.$$

On calcule séparément les deux sommes :

$$\sum_{k=1}^n (2n-k) = 2n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^n k(2n-k) = 2n \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

Après substitution et mise au même dénominateur, il vient

$$E(G_2) = \frac{3(3n-1)a - (n+1)(4n-1) - 3n(n-1)}{6(2n-1)}.$$

Or $(n+1)(4n-1) + 3n(n-1) = 7n^2 - 1$. On obtient bien

$$E(G_2) = \frac{3(3n-1)a - (7n^2 - 1)}{6(2n-1)}.$$

Méthode 2 — Récompense moins coût de la partie

La récompense vaut $a\mathbf{1}_{[X \leq n]}$, tandis que le nombre de cartes découvertes est $\min(X, n)$.
Ainsi

$$G_2 = a\mathbf{1}_{[X \leq n]} - \min(X, n).$$

Par la question 2, $P(X \leq n) = 1 - (n-1)/(2(2n-1)) = (3n-1)/(2(2n-1))$.

De plus,

$$\min(X, n) = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{[X \geq j]}.$$

Comme dans I.2, on en déduit

$$E(\min(X, n)) = \frac{\sum_{r=n}^{2n-1} r(r+1)}{2n(2n-1)}.$$

La formule

$$\sum_{r=1}^m r(r+1) = m(m+1)(m+2)/3,$$

établie par addition de la somme des carrés et de la somme des entiers, donne

$$\sum_{r=n}^{2n-1} r(r+1) = \frac{(2n-1)(2n)(2n+1) - (n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n(7n^2 - 1)}{3}.$$

Donc $E(\min(X, n)) = (7n^2 - 1)/(6(2n - 1))$. La linéarité de l'espérance appliquée à la décomposition de G_2 redonne la formule demandée. Cette approche distingue le montant gagné de la durée payée, sans supposer leur indépendance.

III. Comparaison des deux protocoles

Pour $n = 16$, les espérances deviennent

$$E(G_1) = a - 11, \quad E(G_2) = \frac{47a - 597}{62}.$$

Pour comparer les gains moyens, on soustrait :

$$E(G_2) - E(G_1) = \frac{47a - 597 - 62a + 682}{62} = \frac{5(17 - 3a)}{62}.$$

Le deuxième protocole est donc plus favorable en espérance si $a < 17/3$, tandis que le premier l'est si $a > 17/3$. Comme a est un entier strictement positif, on conclut que le deuxième protocole est préférable pour $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et que le premier est préférable pour tout entier $a \geq 6$. Il n'existe pas de cas d'égalité pour les valeurs de a autorisées.

Relevé des adaptations

Exercice 2, 4.d : la convergence à la borne finie singulière est définie par la limite des intégrales tronquées ; un guidage par changement de variable affine et primitive logarithmique est ajouté. La preuve particulière utilise ensuite la monotonie et une majoration explicite, sans faire appel à un chapitre général sur les singularités aux bornes finies.